千古之谜

与

幾何、天文、物理兩千年

〈紀念Kepler新天文學之四百週年〉

項武義

2009年秋冬之交
于香港浸會大學

重访幾何基礎论之挫折与重建

——平直性与連續性的認知与拓展

项武義

1. 空间的本質与基本性質

2. 幾何學的演進

3. 中、西定量平面幾何的比較分析

4. 不可公度量的發現 —— Hippasus 与 Geoquake

5. Eudoxus：逼近论与幾何基礎论之震後重建与拓展

6. 平直性与連續性的認知与拓展

重访 Kepler's 行星定律之探索与发現

—— 千古之谜的真相大白

项武義

1. 古天文學 (Astronomy of Antiquity)
2. 天文學的文藝復興 (Renaissance of Astronomy)
3. Kepler 的探索歷程 (The Epic Journey of Kepler)
4. 以简洁新途徑重访 (师法其意, 改弦更张)
   (Revisiting Kepler's Epic Journey with simple new approach)

重访Newton's万有引力定律之发現，及其巨著《Principia》中精要的简洁新证

项武義

1 由Kepler's新天文学到Newton's原理的科学进程之简介

2. 巨著《Principia》的主要结果之概述

3. 以简洁新証重访《Principia》之主要数理分析

4. 回顧与展望

1. 空间的本質与基本性質

⊙ 幾何學就是空间的認識论，空间(space)就是宇宙中所有可能的位置(locations)的總体(totality)，通常以點標记位置，以线描述通路(paths)；光线讓我们認识到兩點之间的最短通路的唯一存在性，稱之為連结给定兩點{A、B}的直线段(interval)通常以$\overline{AB}$记之。再者由A射向B和由B射向A的光线都會向前继续延伸，其所经之點集分别是射线$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BA}$，而其和集則稱之謂由{A、B}兩點所確定的直线。如圖1所示。這就是空间的基本结構。

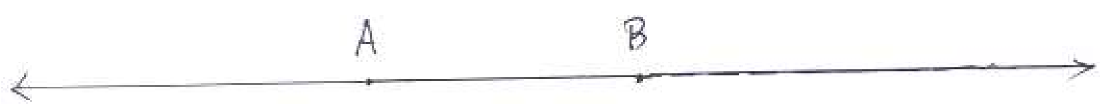


圖1

⊙ 空间的基本性質：

宇宙中所有事物与現象都存在于空间之中，發生于空间之内，所以當然都受着空间的基本性質的制约与蕴育。由此可見，認知空间的基本性質乃是理解宇宙

的起步和基礎. 大体上, 空间的重要基本性可以概括為下述三點, 即

(i) 对称性 (symmetries): 反射对称, 旋轉对称 等等

(ii) 平直性 (flatness): 平行性, △内角和恒為一个平角, 等等

(iii) 連续性 (continuity): 例如直线連续不斷但是一剪就斷.

2. 幾何學的演進 (Evolution of Geometry):

⊙ 定性平面幾何 (qualitative plane geometry):

是古希腊幾何學的起步, 主要讨论全等△ (congruences of △) 和对称性, 例如等腰△定理乃是基本工具, S.S.S 全等性则是平幾基本作圖的工具等等.

⊙ 定量平面幾何 (quantitative geometry):

在中、西文明中都發現了定量平幾中的重要基本公式, 即矩形、△的面積公式, 勾股弦公式 (亦即 Pythagoras Thm) 和相似△的邊長比例式, 等等. 但是在

處理方式和格调上，却又是各有長短，志趣有别。我们在3.中将略作比較分析。

⊙ 立体幾何（亦即空间幾何）（Solid or space geometry）

立体幾何要遠比平面幾何複雜、困難，可以说：平面幾何乃是立体幾何之中遠較平易的一个部份，平面幾何的研讨只是為了進而研究立体幾何的準備、热身工作。自古希腊至今，立体幾何的研究業已有两千多年的歷程；在研讨的方法上，有综合法（Synthetic），坐標解析幾何（Analytical coordinate geometry）向量代数（Vector Algebra）和球面幾何（Spherical geometry）。但是還没能達成令人满意的程度，因為還有许多樸素自然的立体幾何问题有待理解

3. 中、西定量平面幾何的比較分析

⊙ 中国古算：以矩形面積等于長×寬為起点而善用之. 但其本身則直观接受而不予深究. 例如勾股弦公式：

勾方 + 股方 = 弦方

其証法如右圖所示，將 $(a+b)\times(a+b)$ 的正方形用实线和虛线所示的兩种分割计算其面積，即有

$$a^2+b^2+2ab = c^2+4\left(\tfrac{1}{2}ab\right)$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=c^2$$

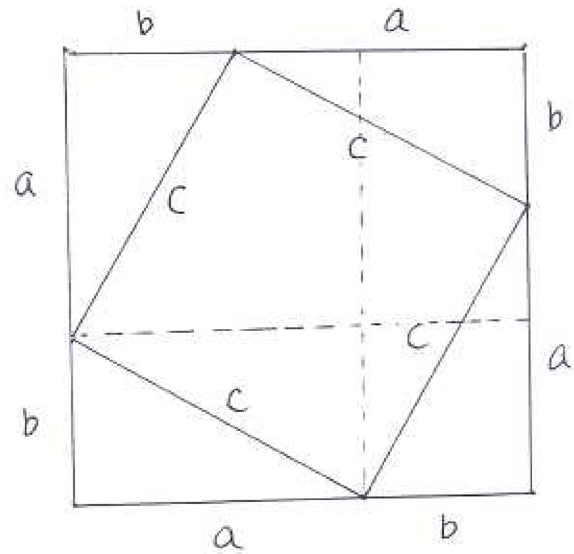


圖2

出入相補原理：

$$bh' = \square B'BGC'$$

$$= \square FC'ED = b'h$$

$$\Rightarrow \frac{b}{b'} = \frac{h}{h'}$$

$$\Rightarrow \frac{b+b'}{b'} = \frac{b}{b'}+1 = \frac{h}{h'}+1$$

$$= \frac{h+h'}{h'}$$

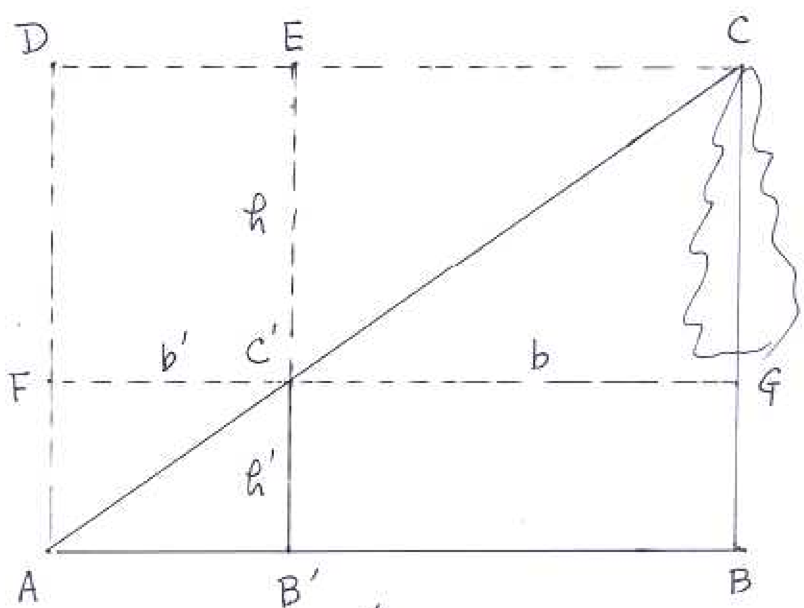


圖3

⊙ 古希腊定量幾何基礎初論：

在長度度量這个極為基本的概念上，力求明確嚴格，首先提出可公度性（commensurability）：

定義：一对线段長 $\{a, b\}$，若存在一个"公尺度" c 使得 a、b 皆為 c 的整数倍，$a = m \cdot c$，$b = n \cdot c$，則称 $\{a, b\}$ 為可公度，如此即可定義比值 $a : b = \frac{m}{n}$

然後，他们認定：可公度性是普遍成立者（universality of commensurability），並以此為當年的定量幾何基礎論的頭号公理（primary axiom or postulate）

而且還引進下述和平直性（flatness）或平行性（//-ism）邏輯等價的第五公設（fifth postulate），即

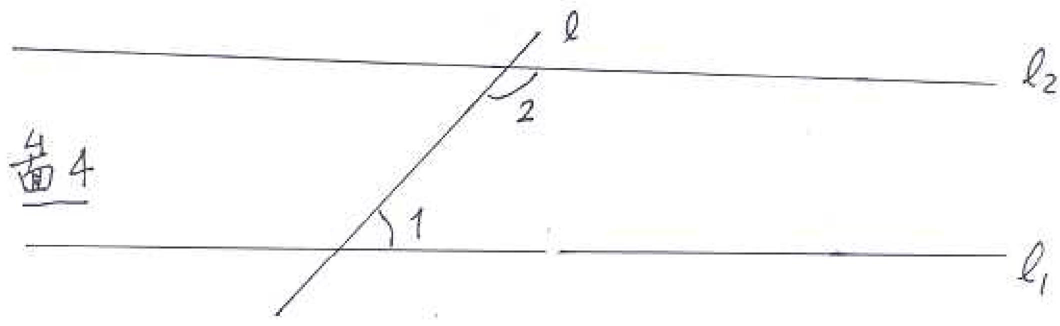


圖4

$\angle 1 + \angle 2 < \pi$（平角）$\Rightarrow$ l_1 和 l_2 必然相交于 l 之右側

基于上述两个添加的"公设"，古希腊几何学家对于定量平几的基本公式，如矩形、△的面积公式，毕氏定理（亦即勾股弦公式）和相似△的边長比例式都逐一给以嚴格论证。主要用平行分割和全等形的知识相结合，例如

[例1] 矩形面积公式：

$$\square(l,w):\square(u,u)=(l:u)\cdot(w:u)$$

[証法]：基于可公度普遍成立之"公设"，存在$\{l,u\}$以及$\{w,u\}$的公尺度c和c'，即

$$l=m\cdot c,\quad u=n\cdot c;\quad w=p\cdot c',\quad u=q\cdot c'$$

不難用平行分割把$\square(l,w)$和$\square(u,u)$分别分割成mp和nq个$\square(c,c')$所以

$$\square(l,w):\square(u,u)=\frac{mp}{nq}=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=(l:u)\cdot(w:u)$$

[例2] 相似△定理：设$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的对应角相等，即有$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，则其对应边边長成比例，即 $a:a'=b:b'=c:c'$

[証法]：基于可公度普遍成立的"公设"，不妨设$a:a'=\frac{m}{n}$。而所要证 就是$b:b'$和$c:c'$也必然等于$\frac{m}{n}$。

不難看到，上述分数比的情形的证明其实可以歸結（reduced to）到整数比的情形，如下圖所示是 $\frac{m}{n}=\frac{3}{2}$ 的证明：

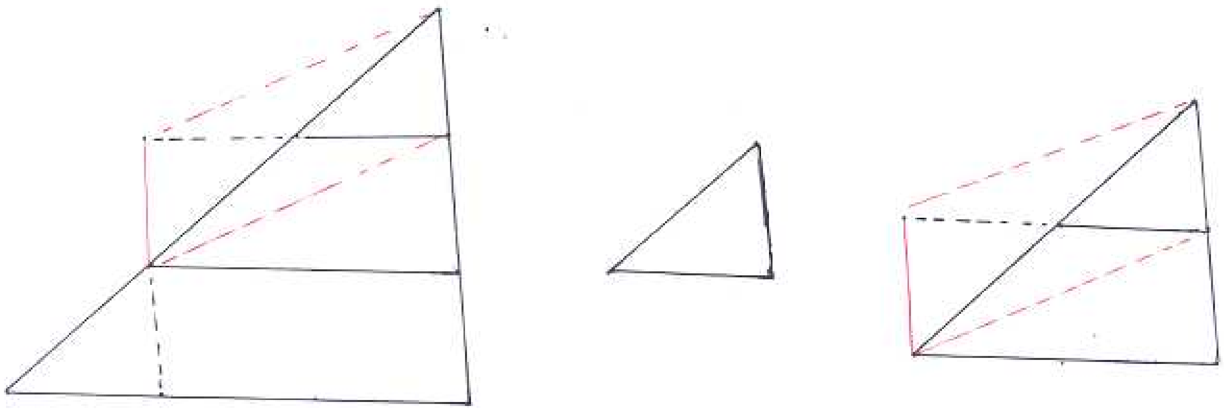


圖5

比較分析：

4. 不可公度量的發現 — Hippasus, Geoquake

话说当年(纪前五世纪), Hippasus 又在沙盤上以芦葦桿画了一个正五边形和它的两條对角线, 並且把前一天运用他熟知的内角和及等腰△定理分析所得的角度逐一註明. 那天他突發異想, 把上、下边 $\overline{B_1B_2}$ 和 $\overline{C_1C_2}$ 各延長一段 $\overline{B_2B_3}=\overline{C_2C_3}=r_1=(b-a)$. 他一眼就看出来 ⬠ $A_2B_2B_3C_3C_2$ 又是一个(小一号)的正五边形!!

此事令他大為震驚! 為什么呢? 因為他熟知下述由一对長度 $\{a、b\}$ 用輾轉丈量法去求其最長公尺度:

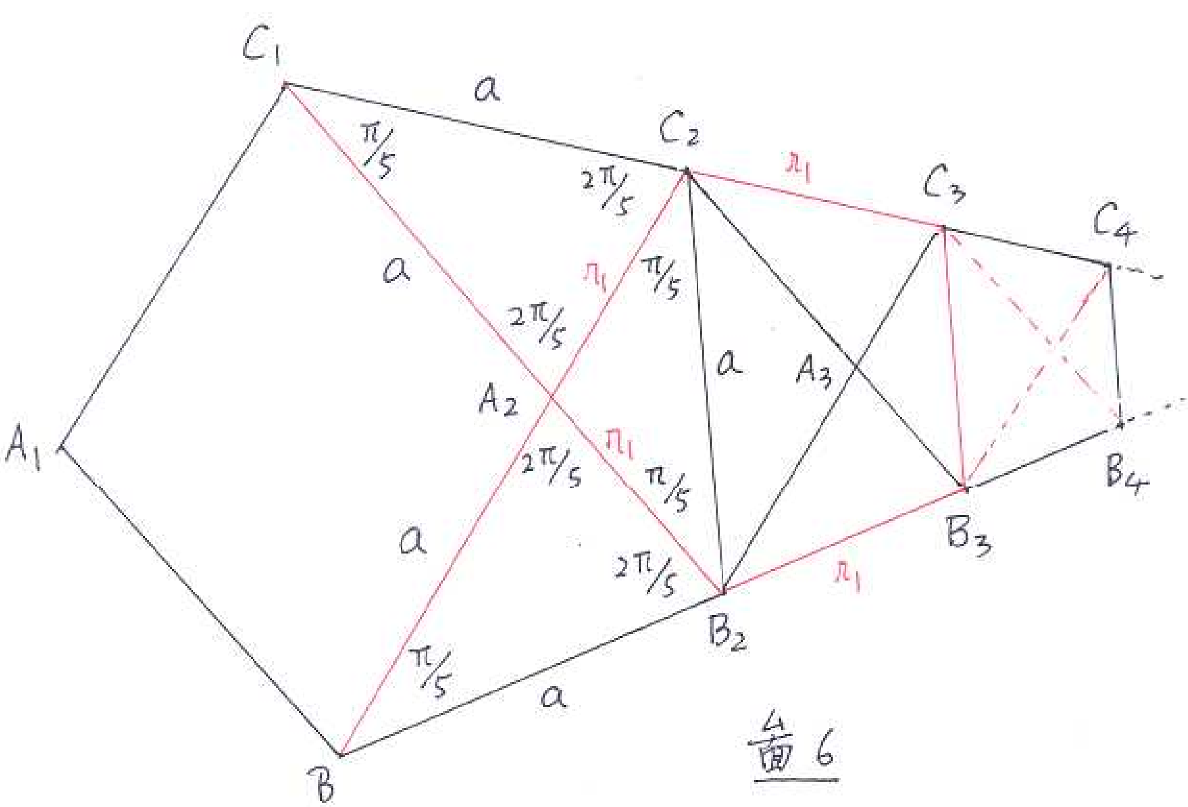


圖 6

即：以較短之 a 丈量 b，得其餘段 r_1；然後再以 r_1 丈量 a，得其餘段 r_2，如此輾轉丈量，總是会有 r_k 整丈 r_{k-1}，则 r_k 就是 $\{a, b\}$ 的最長公尺度。

亦即：设 $a = m \cdot c$，$b = n \cdot c$ 则上述輾轉丈量也同步于現在称之為 Euclid 算法的輾轉相除求最大公因数。

但是上述幾何事实顯示一个正五边形的边長 a 和对角线長 b 的輾轉丈量乃是永無止休的！所以它們不可公度！當年基礎论的頭号公設根本是错的！此事焉得不叫他驚恐萬狀!?

接着，他还用圖7所示之分析，证明一个正方形的边長 a' 及其对角线長 b' 的輾轉丈量也是永無止休的！

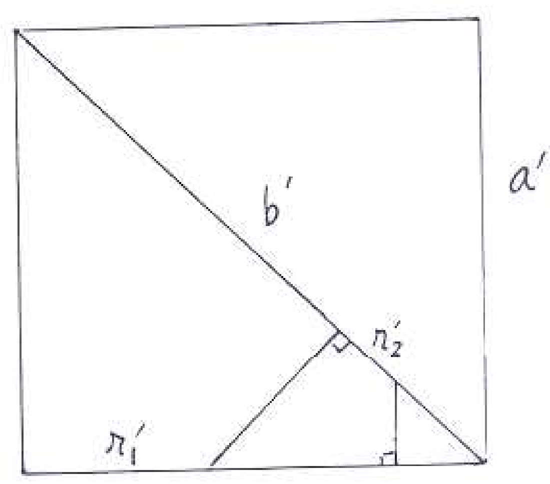


圖7

即：
$$b' = a' + r_1'$$
$$a' = 2r_1' + r_2', \cdots\cdots$$
$$r_{k-1}' = 2r_k' + r_{k+1}', \cdots\cdots$$

5. Eudoxus：逼近论；幾何基礎论的震後重建与拓展

⊙ 相似△定理在 $a:a'$, $b:b'$, $c:c'$ 皆為不可公度的情形如何"拯救"？亦即要如何论证它们依然相等呢？此事讓 Eudoxus 認識到：不可公度比之间的大小或相等关系其实尚有待明確！由此追根究底，他又認識到：两个不可公度比之间的大小或相等关系雖然还有待明確！但是一个不可公度比 $a:b$ 和一个分数 $\frac{m}{n}$ 之间的大小关系却又是具義甚明，他把此莫述為：

⊙ 比較原则：

$$a:b\begin{cases} < \frac{m}{n} \iff n\cdot a < m\cdot b \\ > \frac{m}{n} \iff n a > m\cdot b \end{cases}$$

上述简樸清新的認識，促使他想到两个不可公度比 $a:b$ 和 $c:d$ 之间的大小或相等关系应该可以定

義如下,即:

$$a:b\begin{Bmatrix}<\\>\end{Bmatrix}c:d \Longleftrightarrow \exists\ \frac{m}{n} \text{ 使得 } a:b\begin{Bmatrix}<\\>\end{Bmatrix}\frac{m}{n}\begin{Bmatrix}<\\>\end{Bmatrix}c:d$$

假若這种 $\frac{m}{n}$ 不存在,亦即 $a:b$ 与 $c:d$ 对于任给分数皆有相同的大小关系,则理所当然应该定義它们相等,即

$$m\cdot a\begin{Bmatrix}<\\>\end{Bmatrix}n\cdot b \text{ 和 } m\cdot c\begin{Bmatrix}<\\>\end{Bmatrix}n\cdot d$$

对于所有 $\{m,n\}$ 總是同步,则定義為 $a:b=c:d$.

為了進一步说明上述定義的合理性,他证明了下述逼近定理:

<u>定理</u>:设 $\{a,b\}$ 不可公度,N為任意大的正整数则恒有整数 m 使得

$$\frac{m}{N}<a:b<\frac{m+1}{N}$$

[註]:众所週知,证明是不可能無中生有的,任何证明皆有所基。上述 Eudoxus 逼近定理之所基就是我们現在误称為 Archimedes Axiom 者,即

<u>Eudoxus Postulate</u>:对于任给兩线段 l 和 s,不論 l 有

多長，ℓ 有多短，恒有足够大的（整数）K 使得 $K\cdot\ell > l$.

[証]：令 $\ell = \frac{1}{N}b$，$(m+1)$ 是那个使得 $K\ell > a$ 的最小正整数，亦即有

$$m\cdot\frac{1}{N}b < a < (m+1)\frac{1}{N}b;\quad \frac{m}{N} < a:b < \frac{m+1}{N}$$

歷史的註记：上述简樸精到的逼近论的第一个偉大的应用當然就是重建幾何基礎论，它的应用是無比廣泛深遠的，它也奠定了分析學的基礎.

幾何基礎论的震後重建：

[例1] 矩形面積公式之補证：

不妨设 $a:u$ 和 $b:u$ 皆為不可公度，设 N 是一个任意大的整数，由逼近定理，即有 m 和 m' 使得

$$\frac{m}{N} < a:u < \frac{m+1}{N};\quad \frac{m'}{N} < b:u < \frac{m'+1}{N}$$

亦即

$$\frac{m}{N}u < a < \frac{m+1}{N}u;\quad \frac{m'}{N}u < b < \frac{m'+1}{N}$$

如圖8所示，以 $\{a, b\}$ 為長、寬的矩形包含一个以

$\{\frac{m}{N}u, \frac{m'}{N}u\}$ 為其長、宽的矩形，而且被包含于另一个以 $\{\frac{m+1}{N}u, \frac{m'+1}{N}u\}$ 為其長、宽者之内。由此易見

$$\begin{array}{ccccc} \square(\frac{m}{N}u, \frac{m'}{N}u) : \square(u,u) & < & \square(a,b) : \square(u,u) < & \square(\frac{m+1}{N}u, \frac{m'+1}{N}u) : \square(u,u) \\ \| & & & \| \\ \frac{mm'}{N^2} & < & (a:u)\cdot(b:u) \quad < & \frac{(m+1)(m'+1)}{N^2} \end{array}$$

所以 $\square(a,b):\square(u,u)$ 和 $(a:u)\cdot(b:u)$ 若有任何差别，则必须小于同時把两者夹逼于其间的 $\frac{mm'}{N^2}$ 和 $\frac{(m+1)(m'+1)}{N^2}$ 的差别。但是

$$\frac{(m+1)(m'+1)}{N^2} - \frac{mm'}{N^2} = \frac{1}{N}\left(\frac{m}{N} + \frac{m'+1}{N}\right)$$

在 N 無限增大下是可以小到任意小的。因此它们必须没有任何差别，亦即所要補证者：

$$\square(a,b):\square(u,u) = (a:u)\cdot(b:u)$$

[例2] 相似△定理的補证：设 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$（亦即对应角相等），而 $\frac{m_1}{n_1}$ 和 $\frac{m_2}{n_2}$ 是分别小於、大於 $c:c'$ 的任给两个分数。我们所要補证者

就是

$$\frac{m_1}{n_1} < \left\{ \begin{matrix} b : b' \\ a : a' \end{matrix} \right\} < \frac{m_2}{n_2}$$

也同样成立. 如图9所示 $\triangle AB_1C_1 \subset \triangle ABC \subset \triangle AB_2C_2$

而且它们都相似, 亦即

$$\overline{B'C'} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{B_1C_1} \parallel B_2C_2 ,$$

而且 $\overline{AB_1} = \frac{m_1}{n_1}\overline{AB'}$, $\overline{AB_2} = \frac{m_2}{n_2}\overline{AB'}$

由已证的可公度相似比, 则有

$$\overline{AC_1} = \frac{m_1}{n_1} b' < b < \frac{m_2}{n_2} b' = \overline{AC_2}$$

$$\overline{B_1C_1} = \frac{m_1}{n_1} a' < a < \frac{m_2}{n_2} b' = \overline{B_2C_2}$$

亦即

$$\frac{m_1}{n_1} < \left\{ \begin{matrix} b : b' \\ a : a' \end{matrix} \right\} < \frac{m_2}{n_2}$$

也同样成立. □

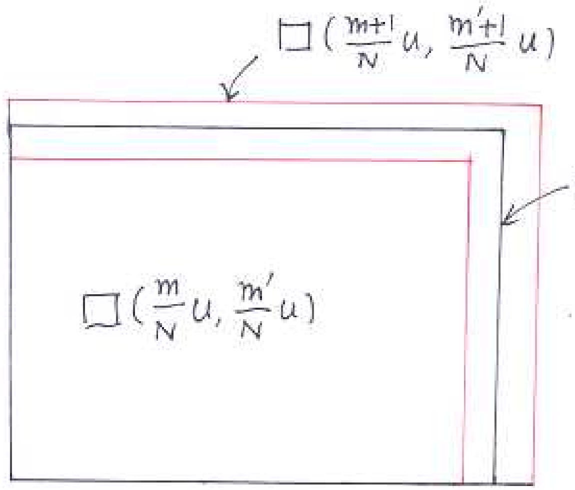


图8

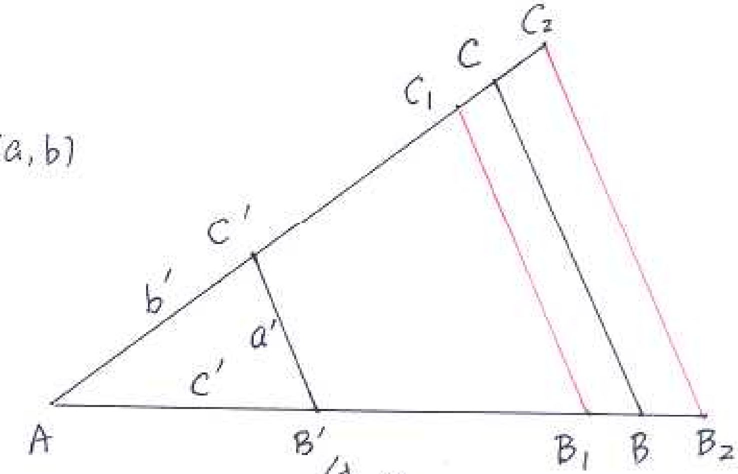


图9

6. 平直性和連續性的認知和拓展

平直性的認知：

⊙ 古希腊幾何学家认识到平行分割在定量幾何基本公式的论证中不可或缺的重要性。這也就是他们引進第五公设的原由。但是當年的定性平面幾何欠缺了下述两个只用对称性就可以证明的定理，即

定理1：任给 $\triangle ABC$ 恒有 $A+B+C \le \pi$（平角）

定理2：若有一个 $\triangle$ 的内角和等于 π，则所有 $\triangle$ 的内角和皆恒等于 π

假若當年得見上述两个定理，則在他们由定性平幾邁向定量平幾時，平直性（即 $\triangle$ 内角和恒等于 π）或則非平直性（即 $\triangle$ 内角和恒小于 π）其实乃是一种選項（momentous choice），前者顯然遠比後者（亦即目下称之谓非欧几何者）要简單好用，而且合乎直观。

⊙ 定理1、2的证明其实相当简單，我觉得一个現

代化的高中教材，实在应该包括它们。兹简述如下：

(i)

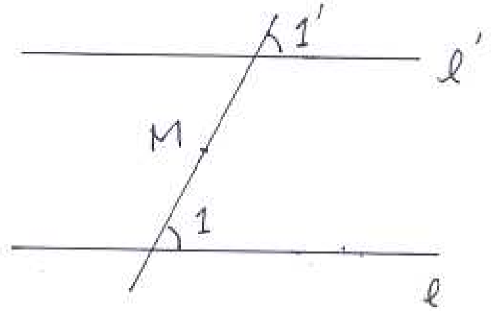


图10

$\angle 1 = \angle 1'$ 则左图对于M点成心对称，所以 $\ell \cap \ell' = \phi$（不相交）

(ii) 如右图所示，

在A点的外角作

$\angle 1' = \angle 1$（内对角）

则 $\ell \cap \ell' = \phi \Rightarrow$ 外角大于内对角

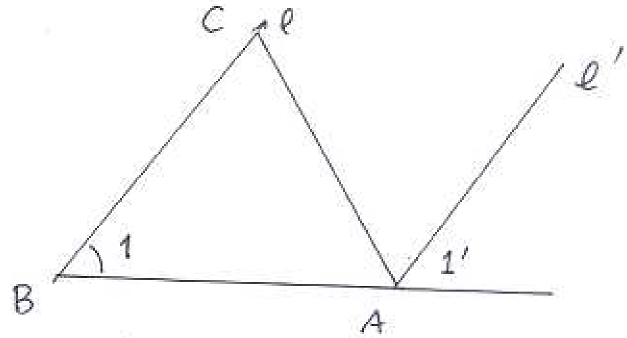


图11

(iii) 定理1之証明：

对于任给 $\triangle ABC$，取 $\angle A$ 为其最小内角，M为其对边之中点，将中线 $\overline{AM}$ 延长一倍至 A'，易見 $\triangle CAA'$ 的内角和和 $\triangle ABC$ 的内角和相等；而它的 $\angle A_1 + \angle A' = \angle 1 + \angle 2$ 乃是原先的"角A"；所以 $\triangle CAA'$ 的最小内角至多是原先之一半。

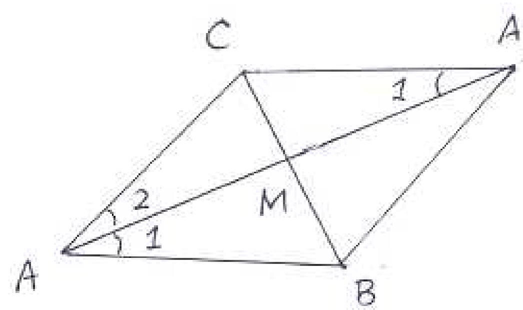


图12

现在用反证法来证明定理1，亦即，由 $\triangle ABC$ 的内角和 $= \pi + \varepsilon$，$\varepsilon > 0$ 来推導矛盾。逐次用上述構造，即可得另一

$\triangle CA_kA_k'$，其内角和依然是 $\pi+\varepsilon$，但是其最小内角

$$\angle A_n < \frac{1}{2^n}\angle A < \varepsilon$$

所以它在C点的外角小于两个内对角之一，亦即和(iii)矛盾。□

(iv) 定理2的证明：

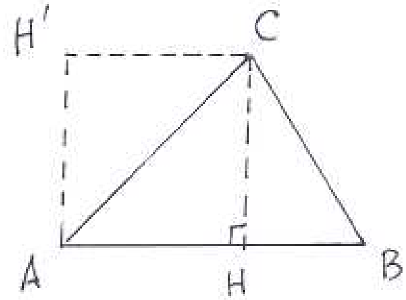


图13

它基本上是定理1的深化。设存在有一个 $\triangle ABC$，其内角和等于 π。若其本身並非直角△，则如图13所示 $\overline{CH}$ 把它分割成两个直角△，它们各别的内角和皆不大于 π，而两者之和则等于 2π。所以必然也都等于 π。由此即可得一如图13所示的矩形，然后又可以用图14所示的砌積法構造一个長、宽任意大的矩形（Eudoxus公设）。

它可以把一个任给的直角 $\triangle OEF$ 如图14所示置放于其左下角。如此即可再用定理1逐次推论如下：

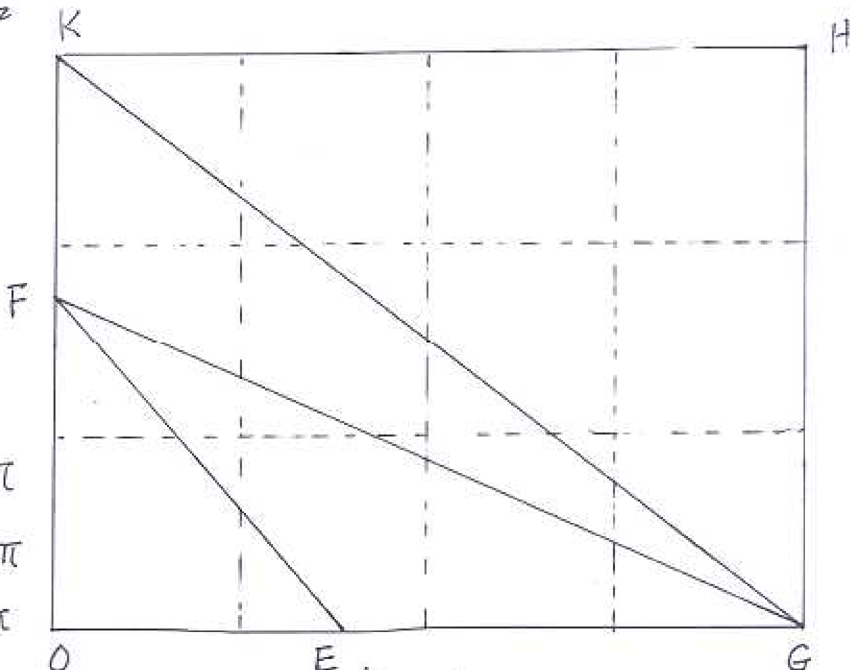


图14

$\triangle OGK$ 的内角和 $=\pi$

$\Rightarrow \triangle OFG$ 的内角和 $=\pi$

$\Rightarrow \triangle OEF$ 的内角和 $=\pi$

⊙ 在此,當然還可问,(△)内角和恒小于也真的是一种選項呢?假若果真如此,這种和我们習用為常大異其趣的定量幾何又是如何?第一个问题是一种存在性问题,而第二个问题则是一种唯一性的问题.驟看起来,似乎应该先行解决前者,然後再研究後者.其真正探索的途徑,反而是先研究後者,才能按菌索驥去構造前者.長话短说,這就是在十九世纪初葉的偉大成就:非歐幾何學。(参看基礎分析學之第 章[ ])

连续性的認知:

⊙ 夹逼数列(*pairs of approximating sequences*):

设有遞增(及遞减)数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 而且有

$$a_n < \alpha < b_n,\ \forall n,\quad (b_n - a_n) \to 0 \ (\text{小到任意小})$$

则称它们是 α 的一对夹逼数列,以 $a_n \to \alpha \leftarrow b_n$ 记之.

⊙ Eudoxus 逼近法与唯一性:

回顧当年 Eudoxus 在重建幾何基礎论中,他所不断運用者乃是被夹逼于這樣一对数列之间的数 α 之唯一性,即若有 α, α' 满足

$$a_n \to \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \alpha'\end{matrix}\right\} \leftarrow b_n \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

其理甚明，因为

$$|\alpha-\alpha'|\le(b_n-a_n)\to 0 \Rightarrow |\alpha-\alpha'|=0$$

例如在例1，例2的论证中，其要点在于構造夹逼数列，各别把

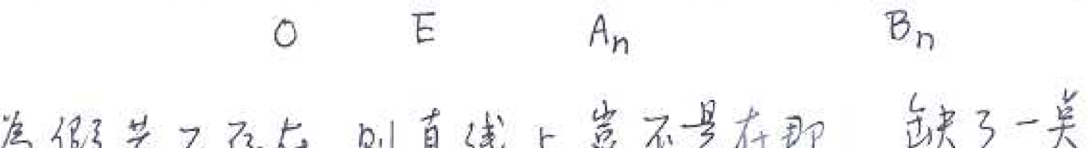
(i) $\square(a,b):\square(u,u)$ 和 $(a:u)\cdot(b:u)$

(ii) $a:a'$, $b:b'$, $c:c'$

夹逼于其间. 由此還可想到其相应的存在性，即

① 存在性问题：设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别是递增和递减数列，而且 $b_n>a_n\ \forall n$, $(b_n-a_n)\to 0$. 是否恒存在一个数 α，被它们夹逼于其间？

在此不妨设想当年幾何大师 Eudoxus 在讲述他的逼近论時，有一位聽者有此一问. 大师的回答又將如何？我觉得不论他是否業已想过上述存在性问题，他肯定都会先说：這到是一个好问题！然後在稍加思攷之後就会用下述简解说明其答案是肯定的.



因为假若不存在，则直线上豈不是在那 缺了一点！此

事和直线連续不断但是一剪就断(之直观内涵)相矛盾. 换言之,上述存在性其实就是上述幾何直观的解析描述.

歷史的注记:

(i) 如今回顧反思, 空间的平直性和連续性的確各有其精微之處, 而它们也只有在定量幾何層面才能真切得見其重要性, 前者是可公度的情形论证之所基而後者则是把可公度的结果推廣到不可公度的一般情形的"不二法門", 两者起承轉化, 捨此别無他途! 而古希腊幾何学浴火重建, 為理性文明奠定永世之基礎令人神往, 高山仰止!

(ii) Hippasus 的發現, 深深觸及連续性的本質; 而 Eudoxus 的逼近论, 则開拓了理解連续性的康莊坦途. 前者為理性文明發現了連续世界而後者则教導我们如何去認知連续世界.

(iii) 直线連续不断, 但是一剪就断乃是空间連续性直观简樸的刻劃, 通过逼近法把它轉化成夹逼数列的存在性這种解析描述 (analytical reformulation)则是整个分析、几何、代数中各种各样的存在性定理论证之所基！令人叹为观止.

連续世界之美妙，有如無缝天衣；Eudoxus 的逼近思想，简朴精到，大智若愚，大巧若拙．令人有"無缝天衣尚須匠心裁"之讚嘆.

1. 古天文學(Astronomy of Antiquity)

⊙ 自古以來,幾何學和天文學一直是古文明中科學的先行者和兩大支柱,特別是古希臘文明,幾何和天文更是當代學者的專注和崇高目標,自紀前五世紀的畢氏學派,世代相承,一直到公元二世紀 Ptolemy 的至大論(Almagest)集其大成.幾何學因為量天巨夢之需求而蓬勃進展,天文學由于幾何學而成效卓著,定量地可預測天象.

⊙ 所有古文明,如中国、古埃及、巴比倫、希腊、瑪雅都注意到天際有五顆明亮的"行星"(planets)

即

金(Venus)、木(Jupiter)、水(Mercury)

火(Mars)、土(Saturn)

它們各有其獨特怪異的行徑,漫遊于黃道十二宮(Zodiac Zones)。為此古天文學家们多方解说,众说芸芸堪称"千古之谜",它也自然地成為古天文學的中心議題,希腊幾何學量天巨夢的主攻課題.但是此事一直到四百年前(1609) Kepler's 行星

定律的發現才真相大白.

⊙ <u>古希腊天文學發展概要</u>:

(i) <u>畢氏學派的宇宙观</u>: 創導具有和谐,统一内在结構的宇宙观 (harmony & unifying in ratios and forms), 強调数学与幾何在理解宇宙内在结構的重要性.

(ii) <u>Eudoxus</u>: 首創由四个同心球,各以其特定轉軸互动的天体模型,它是隨後亚里斯多特(Aristotle)的同心球宇宙模型的雛型(prototype)

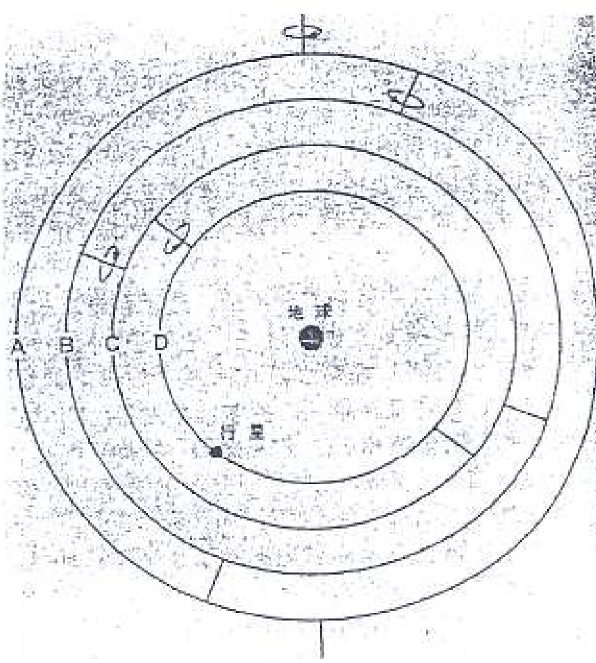


圖1

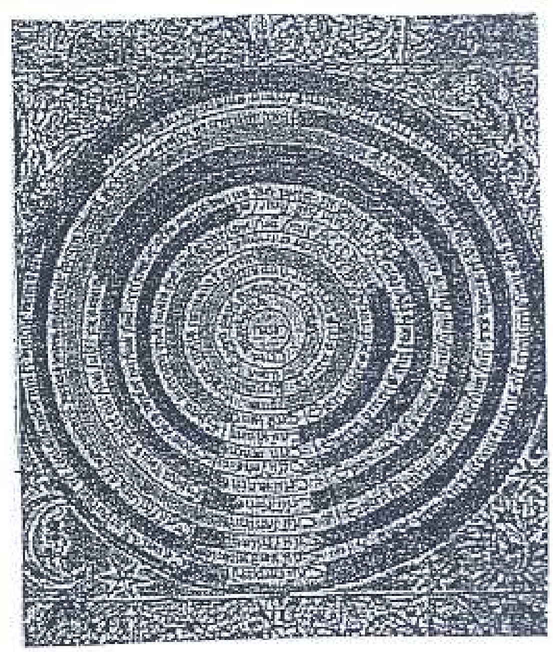
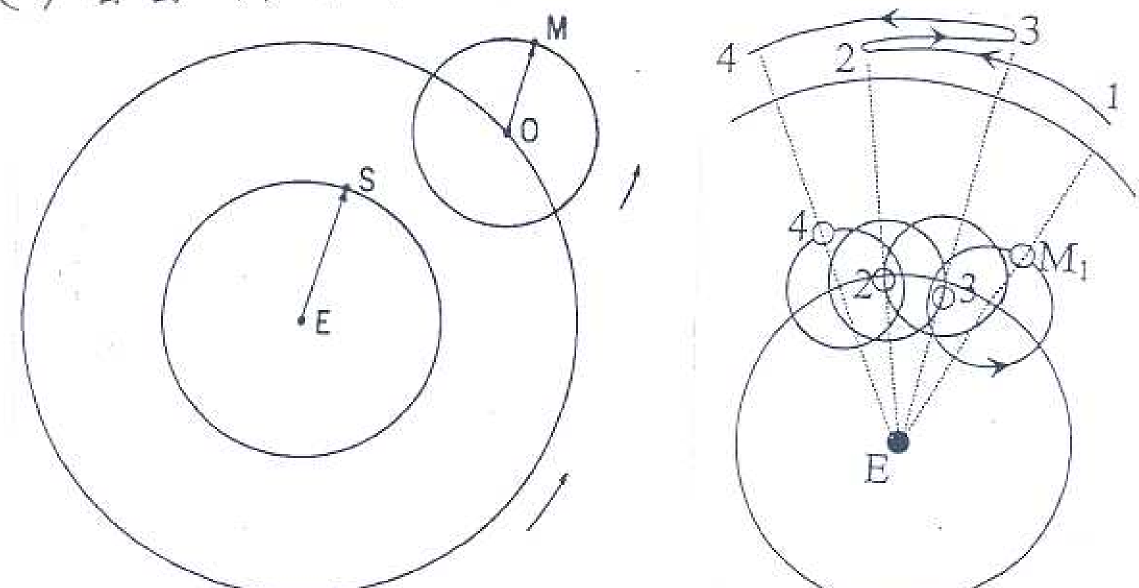


圖1'

(iii) Aristarchus (310-230 BC)：首創"日心說"，可惜他的卓見因為和當代的物理觀相悖而被冷凍近兩千年，一直到十六世紀才在 Copernicus 的工作中得以文藝復興。

(iv) Apollonius (262-190 BC)：首創本輪、均輪之幾何模型来解釋行星的"視动"(Visual Motions)(参看圖2)，特别是行星的逆行現象。

圖2：

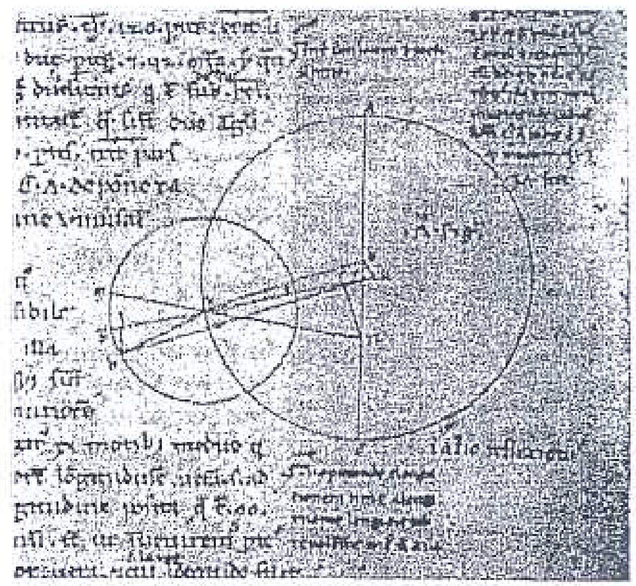


(v) Hipparchus (190-120 BC)：是古天文學最偉大的观測者，是當之無愧的 greatest astronomer of antiquity. 他的系统、精準的天文观测、精到的見解是 Ptolemy's Almagest 的实質基礎。例如他居然能够测算出地球轉軸的微小变动，(precession of equinoxes) 其

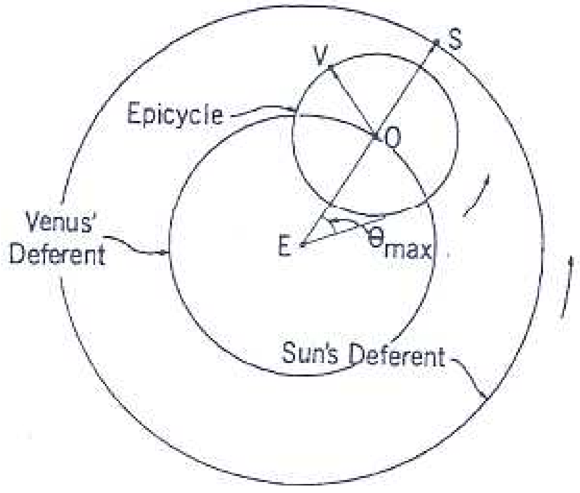
週期是 26,000 年!

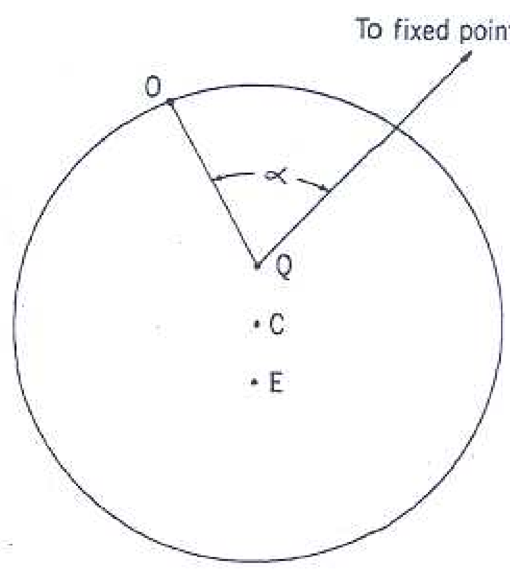
(vi) Ptolemy's Almagest (至大论): 集希腊天文学之大成. 其本质上是地心论, 虽然是一种将错就错的几何模型. 但依然能够达成相当难能可贵的可预测性.

Cover



a typical page





2. 天文學的文藝復興 (A Prelude to Kepler's Astronomia Nova)

⊙ Copernicus (1473-1543): 文藝復興 Aristarchu 的心日論:

Commentariolus (1515)

On the Revolutions of Heavenly Spheres (1543)

⊙ Tycho de Brahe (1546-1601)

1572: Nova; De Nova Stella

1577-97: Uranisborg at Hveen: 廿年

夜以繼夜,力求精準之天文觀察

可以說是古代 Hipparchus 的文藝復興

1600-01: Benatek, Prague: 天作之遇

⊙ 天文學的巨棒三接力 (Grand Astronomical Relay of Science)

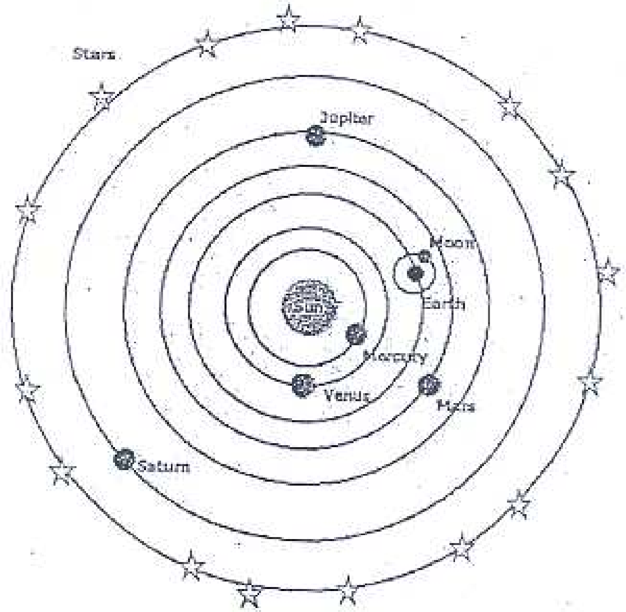
Copernicus → Tycho → Kepler

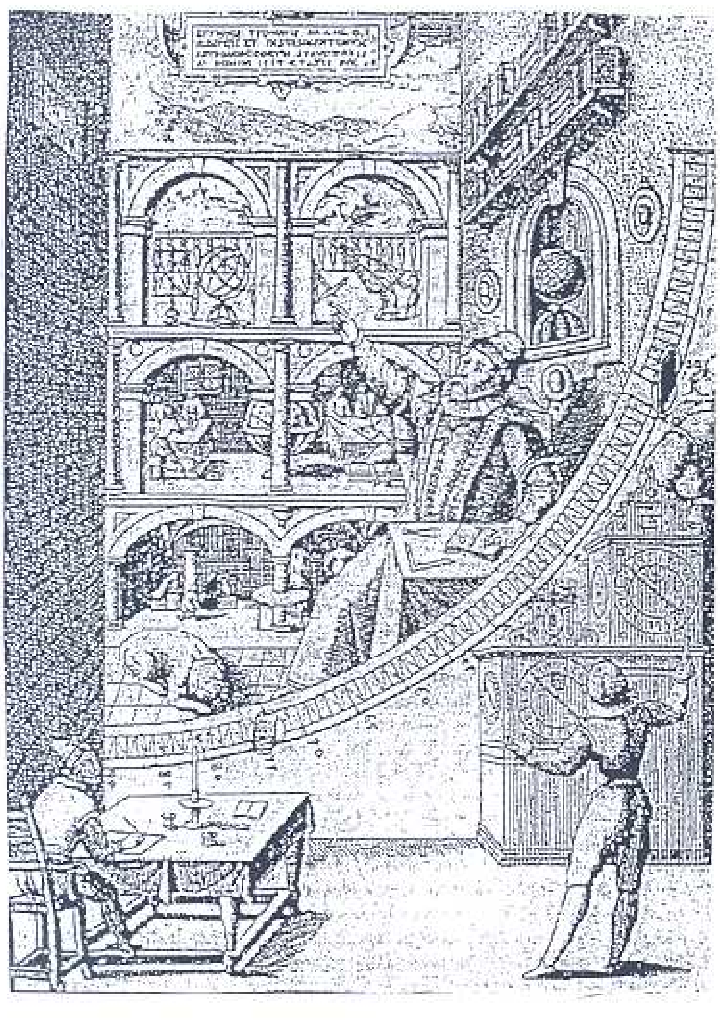
Helio centric model

Copernicus

De Revolutionibus

(1543)





1577 – 1597

Uranisborg, Hveen

二十年如一日

夜以继夜，力求精準

的天文观察：

Tycho的天文宝庫

它是Kepler实验

性定律的原始資料

3. Kepler的探索歷程 (The Epic Journey of Kepler):

⊙ 啓蒙: Kepler (1571-1630) 出生於南德新教区域的 Weil 镇, 家境貧困, 幸賴當時该区的统治者重視教育, 奬励学術; Kepler 才能憑藉他优秀的学業, 靠奬学金逐步唸到大学, 就读于新教区域的学術中心 Tuebingen 大学, 甚得该校天文学教授 Maestlin 的赏識, 而他则是一位哥白尼日心论的鼓吹者. 但是 Kepler 當年主修的是傳教士学位.

是 1594, 95 的两件偶發事件使得 Kepler 踏上畢生致力於天文学的征途, 数十年如一日, 百折不饒地探索太陽系的千古之谜.

1594: 去 Graz 的一所高中做数学教师

1595 年七月十九日: 突發異想

1596: 少年狂想曲: Mystery of Universe

(参看 :6)

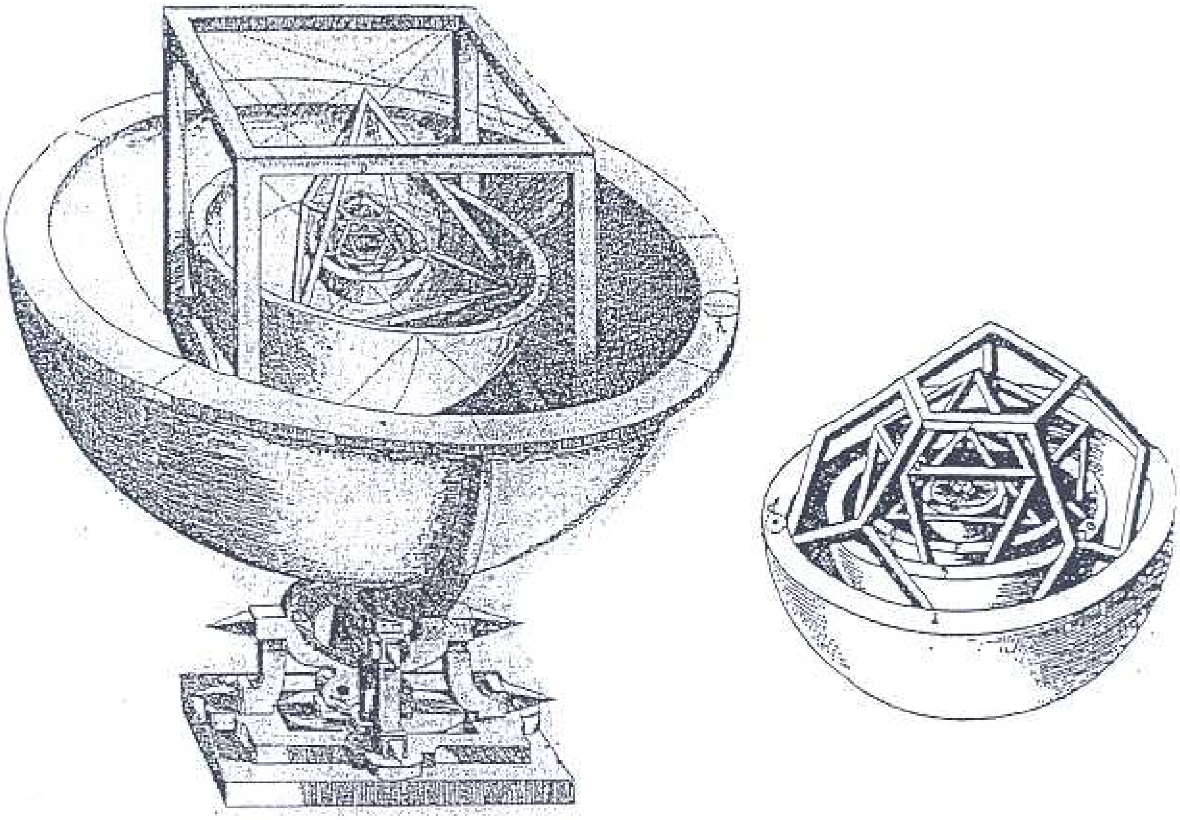


图6

六个行的軌道球壳 和五个正多面体的妥加配置外接与内切,有如"天際的植树问题"各就其位。狂想少年 Kepler 的"天啓"(revelation)宇宙之秘奥激发了他锲而不捨,献身于行星運行規律之探索,這也就是天文學大师 Kepler 奇突的啓蒙.

⊙ 天作之遇(1600-01, Benatek, Prague):

Tycho 和 Kepler:一老一少,長短互補互需本當是天文学上的"天作之合"。但是他倆 1600 到 1601 年十月廿四日 Tycho 逝世的共處卻遠非融洽。所以只能说是天作之遇,使得 Tycho 畢生累積的天文宝庫,由曠世奇才 Kepler 傳承,千古之谜得以真相大白,理性文明得以突飛猛進。唯有天意,才可能有此天作之遇和奇妙的巨棒交接

⊙ 火星(Mars):Kepler 的福星(lucky star)也是煉獄(refining fire):

火星軌道的研究是 Kepler 當 Tycho 的助手的第一个任務。他當時自吹自擂说只要八天就可以解答之。但是此事他苦戰八年才终于得解。其结果是千古之谜得解,天文學為之全面革新。火星的確既是他的福星也是使得他脫胎換骨的煉獄,使得他由此脫胎換骨,創建新天文學。

Kepler 的行星三定律 (Laws of Planets Motions):

⊙ 椭圆律: 六个行星(即金、木、水、火、土和地球)各自绕日之軌道是一个以太陽居于其焦点之一的椭圆.

⊙ 面積律: 行星和太陽的連线在单位時间所掃过的面積守恒.

⊙ 週期律: 六个行星的長軸之立方和其週期之平方的比值皆相同.

⊙ 其中地球绕日的面積律是他第一個重大突破也是他得以发現火星的面積律與椭圆律的基礎所在. 上述三者发表於 1609 的 Astronomia Nova.

⊙ 地球的椭圆律以及其他四個行星的面積律與椭圆律发表於他隨後的三册 Epitome of Copernican Astronomy (1617-21)

⊙ 综合六个行星的週期律則发表於 Harmonica Mundi (1619). 至此, Kepler 的少年狂想由以太陽系

永恒之舞的交響樂而完美作结；幾何学古代相承两千年的量天巨夢终于得圆；他的豐功偉業是理性文明第二个光芒萬丈的里程碑.

新天文学的開創又直接引導物理学的全面革新. Newton的巨著Principia（自然哲学的数学原理, 1687）则是理性文明第三个偉大里程碑.

4. 师法其意, 改弦更張, 以简潔新途徑重訪Kepler行星定律的探索歷程（Revisiting Kepler's Epic Journey with simple new approach）

⊙ Kepler行星三定律是基于Tycho天文宝庫的实測資料, 歷經廿多年百折不饶, 坚苦奮鬥才發現的实驗性定律（Experimental Laws）. 以Kepler卓越的才華, 超人的毅力, 歷盡艱辛, 挫折的探索歷程是很難亦步亦趨地重訪的. 但是如何由僅僅是方位上的天文观测, 分析, 综合逐步探索而得太陽系永恒之舞的Kepler's Laws, 却又是继承文明的後輩所不可不深究其理者,

自然也是师法先贤，獲得啓發的佳園。本讲將以後見之明，师法其意，改弦更張，另闢新徑地重访這個科学史上偉大的突破。

⊙ 师法其意之一：跨週期疊合量天術 (method of transperiod superposition)。

為什么兩千多年來，古今代代的幾何学家的量天巨夢一直到 Kepler 手中才達成呢？他之所以能前輩之所不能的"新意"何在？這就是我第一个要討論的卡氏量天術：

如圖7所示，E_1 和 E_2 是相差几个火星年 (Martian years 约為 687.1天) 的地球位置，因此發生在不同時间的 {日、地、火} 三星的相对位置 ΔSE_1M 和 ΔSE_2M 具有公共邊 $\overline{SM}$。其中角度 $\{\theta, u_1, u_2\}$ 是薄暮观測 (acronychal observation) 的实測数据。令

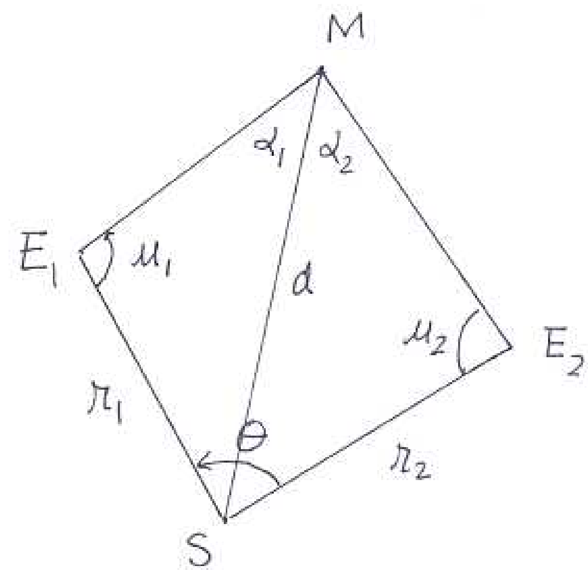


圖7

$\alpha_i = \angle E_i M S$, $\beta = 2\pi - \mu_1 - \mu_2 - \theta = \alpha_1 + \alpha_2$, $d = \overline{SM}$

则有

$$\frac{d}{\sin\mu_i} = \frac{r_i}{\sin\alpha_i} \Rightarrow \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{r_1 \sin\mu_1}{r_2 \sin\mu_2} (= k)$$

$$\sin\alpha_1 = \sin(\beta - \alpha_2) = \sin\beta\cos\alpha_2 - \cos\beta\sin\alpha_2 = k\sin\alpha_2$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \cot^{-1}\left(\frac{k + \cos\beta}{\sin\beta}\right)$$

由此可見，只要能充分掌握日一地距 r_i，就能够有効計算其他行星的日一星距和方位.

师法其意之三：日一地距的系统研究是邁向新天文學的奠基工程.（参看 Part III, Astro. Nova）

话说當年，他由上述卡氏量天術以及原先探索火星運动的嘗試屢试屢敗的經驗，使他充分认识到系统掌握日一地距（亦即地球繞日運动的極坐標方程）的基本重要性. 於是毅然將原先探索火星運行的计算反回来研究日一地距. 這就是其新天文學第三卷的主题. 其结果是

第30章所列的180个日地距，以及地球绕日的面积律——他廿年探索历程的第一个突破。如今回顾，也是全程最最重要的突破。

师法其意，在重访的途径上，地球面积律的探索，自然也是"首要"。

后见之明之一：地球面积律的探索途径：

令 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ 是地球绕日的角速度（angular velocity）。则一方面每天薄暮时分的日-地方位是观察的第一个实测，所以每天的"平均角速度"乃是天文观测的第一手数据；而另一方面，地球的面积律就是

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega = 常数$$

亦即 r^2 和 ω 成反比。

如图8所示，我们可以由一个火星冲（conjunction），亦即 S-E-M 三连星开始，设 E_i，E_j 是和它相差几个火星年的地球位置。则 $\{\theta_i, \mu_i; \theta_j, \mu_j\}$ 皆为实测之值，而 $\alpha_i = \pi - \theta_i - \mu_i$，$\alpha_j = \pi - \theta_j - \mu_j$

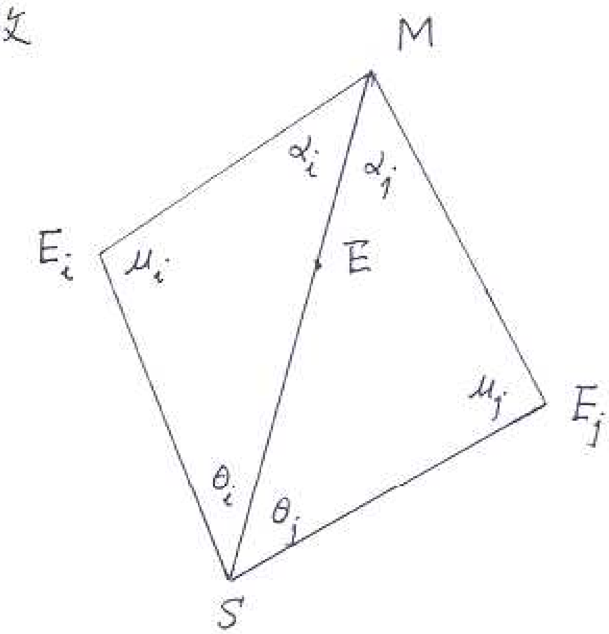


图8

由正弦定律即可算得

$$r_j^2/r_i^2 = \sin^2\alpha_j \sin^2\mu_i / \sin^2\alpha_i \sin^2\mu_j$$

所以自然要將上述算得者和实測的 ω_i/ω_j 作数值比較，看看它们是否總是幾乎相等？以下所列的是改用現代天文观測数据的一个实例

表 5-1　三十個火星年的實測實算數據

日期	ω_i	ω_j	r_j^2/r_i^2	ω_i/ω_j	日期	ω_i	ω_j	r_j^2/r_i^2	ω_i/ω_j
1948. 5. 5	0.969	（以此日期當做基準）			1948. 5. 5	0.969	（以此日期當做基準）		
1940.10.26		0.998	0.968	0.971	1957.9.30		0.983	0.976	0.986
1938.12. 9		1.016	0.952	0.954	1959. 8.18		0.961	1.006	1.008
1937. 1.21		1.017	0.951	0.952	1961. 7. 5		0.953	1.014	1.016
1935. 3. 6		1.001	0.966	0.968	1963. 5.23		0.962	1.006	1.008
1933. 4.18		0.977	0.990	0.992	1965. 4. 9		0.982	0.984	0.987
1931. 6. 1		0.958	1.009	1.012	1967. 2.25		1.005	0.961	0.964
1929. 7.14		0.954	1.014	1.016	1969. 1.12		1.019	0.949	0.951
1927. 8.27		0.966	1.003	1.003	1970.11.29		1.014	0.954	0.956
1925.10. 9		0.988	0.976	0.980	1972.10.16		0.992	0.973	0.976
1923.11.22		1.010	0.957	0.959	1974. 9. 3		0.969	1.000	1.000
1922. 1. 4		1.019	0.949	0.951	1976. 7.21		0.955	1.013	1.015
1920. 2.17		1.009	0.959	0.960	1978. 6. 8		0.957	1.011	1.013
1918. 4. 1		0.986	0.981	0.983	1980. 4.25		0.973	0.993	0.996
1916. 5.14		0.964	1.003	1.005	1982. 3.13		0.997	0.970	0.972
1914. 6.27		0.954	1.015	1.016	1984. 1.29		1.016	0.952	0.954

最後兩行相差不到 0.3%，亦即幾乎相等。

再者，我们還可以改用其他火星衝為起点，得更

多(r_i^2/r_j^2)和 ω_j/ω_i 幾乎相等的系列。其重疊覆蓋的時日幾乎包括全年各天,所以 $\frac{1}{2}r^2\omega$ 是的確守恒的!這也就是地球面積律的探索新途徑。

後見之明之二:地球的橢圓律之重訪,其一

其实,Kepler在發現地球面積律的过程中,業已同時發現了地球的橢圓律而不自知。何以得見?他在第三卷的中段第30章,以近、遠日點距離之半為100,000單位,所列的日–地距在180个方位之值。若改用

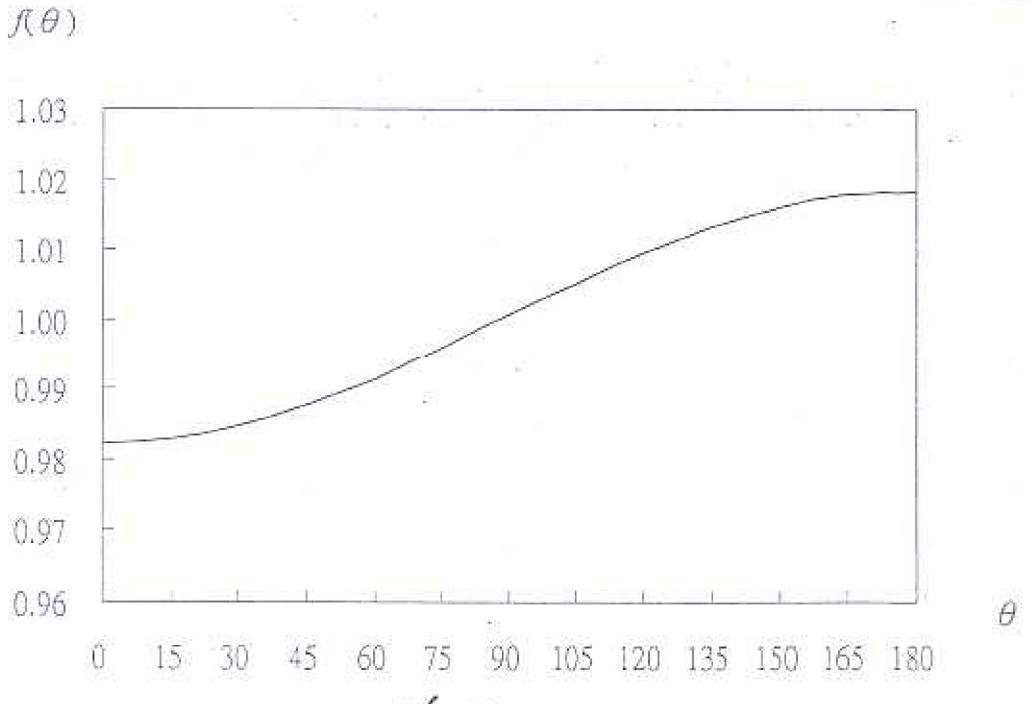
$$f(\theta) = \frac{100,000}{r(\theta)}$$

描绘其圖象(参看圖–9及表二),以Kepler探索实驗性定律的經驗和敏感度,他肯定会一眼就看出

$$f(\theta) \doteq c_0' + c_1' \cos\theta$$

而這就是橢圓的極坐標方程(以太陽為其焦點之一)

度 (°)	分(′)	秒(″)	距離	度 (°)	分(′)	秒(″)	距離
0	0	0	101800	90	58	11	99921
5	53	33	101790	95	58	35	99765
10	48	12	101766	100	59	29	99610
15	42	57	101729	105	0	31	99489
20	37	49	101678	110	2	14	99341
25	32	52	101615	115	4	23	99198
30	28	8	101539	120	6	57	99061
35	23	43	101451	125	9	56	98931
40	19	24	101351	130	13	18	98810
45	15	30	101242	135	17	1	98698
50	11	55	101123	140	21	3	98595
55	8	42	100995	145	25	24	98503
60	5	53	100860	150	30	0	98422
65	3	28	100719	155	34	50	98353
70	1	30	100571	160	39	51	98296
75	59	42	100389	165	45	2	98253
80	58	42	100235	170	50	20	98222
85	58	14	100078	175	55	42	98204
				180	0	0	98200



後見之明之三：地球橢圓律之重訪，其二

在 Kepler 年代還沒有解析幾何．從解析幾何的觀點，圓錐截線的方程式是二次，所以五个條件定一錐线．若將其焦點之一作為原點，則三點業已確定其錐线，它的極坐標方程乃是

$$\frac{\sqrt{k}}{r} = c_0' + c_1'\cos\theta + c_2'\sin\theta.$$

由此可見，只要任取相隔較大的三天，亦即 θ_i，$1 \le i \le 3$，將由觀測所得的 $\omega(\theta_i)$，用下列一次方程式

$$\sqrt{\omega(\theta_i)} = c_0' + c_1'\cos\theta_i + c_2'\sin\theta_i \quad i=1,2,3$$

解得 $\{c_0', c_1', c_2'\}$．然後再任選其他時日來驗算

$$\sqrt{\omega(\theta)} = c_0' + c_1'\cos\theta + c_2'\sin\theta$$

的可預測性．這樣又可以直接用地球的面積律和 $\omega(\theta)$ 每天的直接可測性發現地球的橢圓律。

歷史的註記：

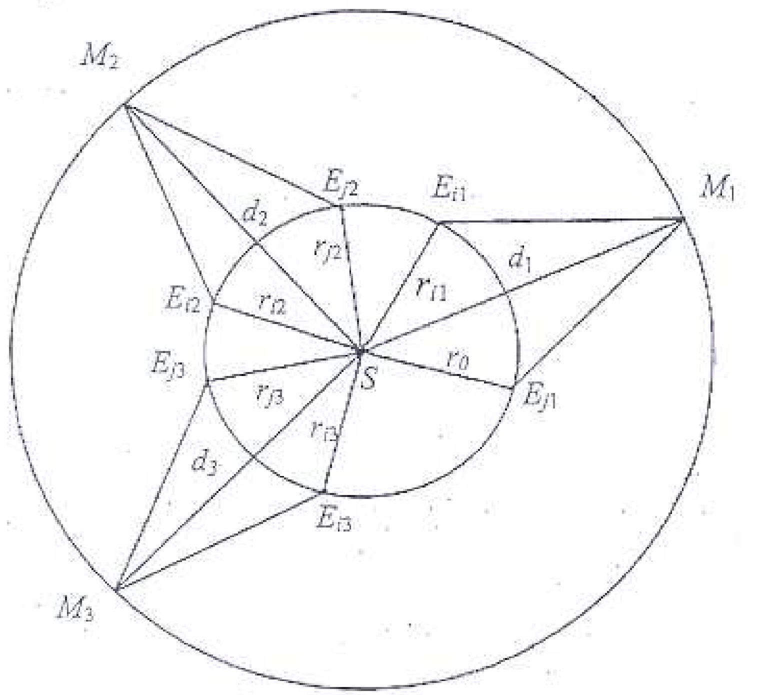
system of linear equations, namely

$$\sqrt{\omega(\theta_i)} = c_0' + c_1' \cos\theta_i + c_2' \sin\theta_i \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

and then try to verify its predictibility for other days.

3) Revisiting the discovery of area law for Martion orbit

Fig. 11



日期	μ_i	μ_j	θ	β	k	α_j	r_j	d
1950. 5.13 (1952. 3.30)	120.656°	141.140°	42.456°	304.253°	1.387	22.973°	100000	160750
1952. 6.21 (1954. 5. 9)	122.319°	130.592°	41.744°	294.655°	1.120	30.593°	101072	150805
1954. 8.15 (1956. 7. 2)	125.251°	116.179°	41.593°	283.024°	0.906	40.722°	101770	139993
1956.11. 1 (1958. 9.19)	126.837°	116.786°	43.041°	286.665°	0.885	39.256°	100518	141804
1959. 1. 7 (1960.11.24)	122.044°	133.781°	44.249°	300.073°	1.170	27.383°	98793	155079

As indicated in Fig. 12, $\diamondsuit_1$ and $\diamondsuit_2$ are only differred by one day, while the daily angular velocity is given by

$$\varphi = b + c - a \ (= \omega)$$

Therefore, it is straight-forward to use the same kind of trigonometry twice to obtain the following list of values

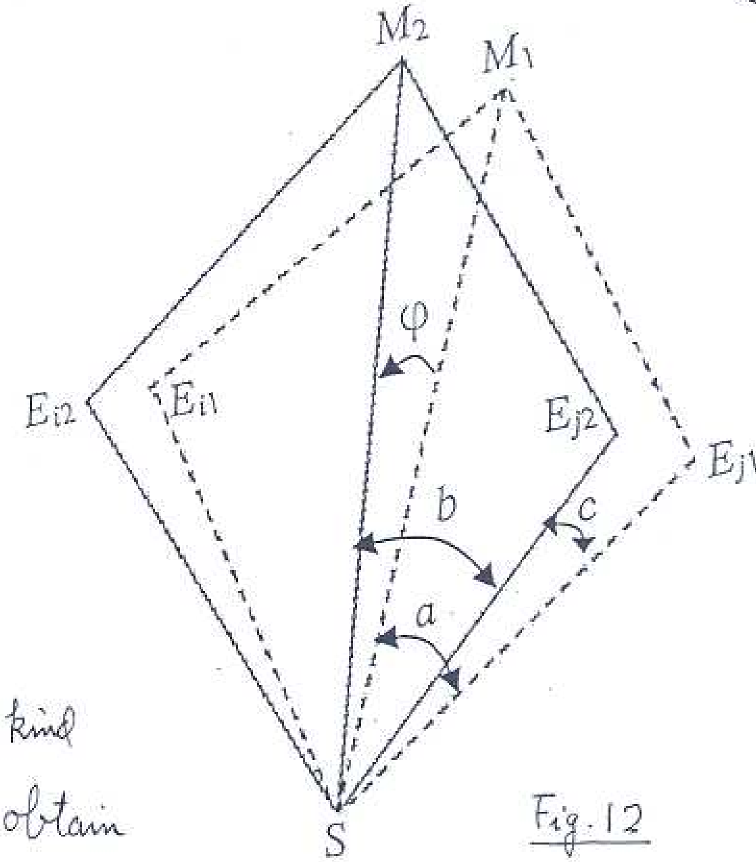


Fig. 12

date	1952.3.30	1954.5.9	1956.7.2	1958.9.19	1960.11.24
ω	0.469	0.534	0.620	0.603	0.504

表 5-4 五個不同日期火星日火距平方 d_j^2/d_i^2 比值與對應角速率 ω_i/ω_j 比值

日期	d	ω	d_j^2/d_i^2	ω_i/ω_j
1952. 3.30	160750	0.469	1.000	1.000
1954. 5. 9	150805	0.534	0.880	0.878
1956. 7. 2	139993	0.620	0.758	0.756
1958. 9.19	141804	0.603	0.778	0.778
1960.11.24	155079	0.504	0.931	0.931

Fig. 13

4) Revisiting the discovery of law of ellipse for Mars

Set

$$\frac{100000}{d} = C_0 + C_1 \cos\psi + C_2 \sin\psi$$

to be the polar coordinate equation determined by the positions of M at 1952.6.21; 1954.8.15 and 1956.11.1, namely

表 5-5　依照表 5-2 中數據計算所得對應之火星至太陽連線所張之角度 ψ（取 1950 年 5 月 13 日火星至太陽連線為 0° 角作參考）

日期	d	ψ
1952. 6.21	150805	41.337°
1954. 8.15	139993	98.458°
1956.11. 1	141804	174.976°

Hence,

$$C_0 = 0.662,\quad C_1 = -0.040,\quad C_2 = 0.047$$

$$e = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\,/\,C_0 = 0.093$$

日期	d	ψ	d'	$(d'-d)/d$ (%)
1959. 1. 7	155090	235.697°	154866	-0.144
1961. 2.21	164125	277.814°	163935	-0.116
1963. 3.25	166678	310.942°	166587	-0.055
1965. 4.29	163511	345.914°	163462	-0.030
1967. 6. 6	155039	24.493°	155018	-0.014

(3). 水星的面積律與橢圓律

參考圖 5-4，水星與太陽之日水距 d 也可由日地距（此處取 1950 年 4 月 27 日之值）$r_{j1}=r_0$ 爲 100000 爲參考值。則其他隨意選取四個不同日期計算所得之日水距 d，同理可由式（4-1）（4-4'）（4-6'）（4-8"）與（4-7'）求得，並列於表 5-7。

表 5-7 隨意選取五個不同日期計算所得之日水距 d

日期	μ_i	μ_j	θ	β	k	α_j	r_j	d
1950. 4.27	19.065°	21.155°	87.591°	232.189°	0.925	111.551°	100000	38802
1951. 8. 6	27.114°	20.249°	84.161°	228.477°	1.323	131.381°	102489	47274
1952.11.21	17.005°	16.952°	86.901°	239.143°	0.980	118.563°	102548	34043
1954. 2.19	15.590°	16.538°	89.368°	238.505°	0.946	116.404°	100211	31847
1954. 6. 7	23.855°	18.041°	85.783°	232.320°	1.334	132.395°	100858	42296

利用圖 5-5 關係，可自水星在表 5-7 中所選取不同日期之觀測值，求得所對應之水星角速率 ω，如此可檢視 $d^2\omega$ 是否爲常數，或 $d_j^2 / d_i^2 = \omega_i / \omega_j$，而建立起水星之面積律（表 5-8）

表 5-8 任取五個不同日期顯示 d_j^2/d_i^2 與 ω_i/ω_j 幾乎完全相等，證得水星之面積律

日期	d	ω	d_j^2/d_i^2	ω_i/ω_j
1950. 4.27	38802	4.015	1.000	1.000
1951. 8. 6	47274	2.746	1.484	1.462
1952.11.21	34043	5.369	0.770	0.748
1954. 2.19	31847	5.994	0.674	0.670
1954. 6. 7	42296	3.390	1.188	1.185

選取水星在 1950 年 4 月 27 日位置作爲起始參考，在附表 5-7 中其他三個日期之水星至太陽連線所張之角度，可與火星類似方法求得，並列於下表 5-9。

表 5-9 依照表 5-7 中數據計算所得對應之水星至太陽連線所張之角度 ψ

（取 1950 年 4 月 27 日水星至太陽連線為 0° 角作參考）

日期	ψ
1951. 8. 6	80.512°
1952.11.21	200.370°
1954. 2.19	291.629°

由日水距週期函數式（5-9），可求得水星繞日運動的週期關係式爲

$$\frac{100000}{d} = 2.67 - 0.872cos\psi - 0.544sin\psi \qquad (5\text{-}11)$$

將此距離關係式計算所得之日水距，與觀測值相比較，彼此完全相等（表 5-10）。可知此週期函數確實可準確描繪出水星之運動軌跡。

表 5-10 隨意選取五個不同日期，比較週期關係式所求得

之日水距 d' 及由日地距所表示之日水距 d

日期	d	ψ	d'	$(d'-d)/d$ (%)
1954. 6. 7	42296	23.258°	42104	-0.454
1955. 9.28	42235	135.923°	42477	0.573
1957. 1. 6	31173	268.060°	31088	-0.273
1958. 4. 7	38296	356.560°	38232	-0.167
1959. 7.10	46560	59.121°	46332	-0.49

由於式（5-11）亦爲一橢圓軌跡方程式（5-3'），證實水星軌道爲一橢圓軌道，且其離心率

(3). 水星的面積律與橢圓律

參考圖 5-4，水星與太陽之日水距 d 也可由日地距（此處取 1950 年 4 月 27 日之值）$r_{j1}=r_0$ 爲 100000 爲參考值。則其他隨意選取四個不同日期計算所得之日水距 d，同理可由式（4-1）（4-4'）（4-6'）（4-8"）與（4-7'）求得，並列於表 5-7。

表 5-7　隨意選取五個不同日期計算所得之日水距 d

日期	μ_i	μ_j	θ	β	k	α_j	r_j	d
1950. 4.27	19.065°	21.155°	87.591°	232.189°	0.925	111.551°	100000	38802
1951. 8. 6	27.114°	20.249°	84.161°	228.477°	1.323	131.381°	102489	47274
1952.11.21	17.005°	16.952°	86.901°	239.143°	0.980	118.563°	102548	34043
1954. 2.19	15.590°	16.538°	89.368°	238.505°	0.946	116.404°	100211	31847
1954. 6. 7	23.855°	18.041°	85.783°	232.320°	1.334	132.395°	100858	42296

利用圖 5-5 關係，可自水星在表 5-7 中所選取不同日期之觀測值，求得所對應之水星角速率 ω，如此可檢視 $d^2\omega$ 是否爲常數，或 $d_j^2/d_i^2=\omega_i/\omega_j$，而建立起水星之面積律（表 5-8）

表 5-8　任取五個不同日期顯示 d_j^2/d_i^2 與 ω_i/ω_j 幾乎完全相等，證得水星之面積律

日期	d	ω	d_j^2/d_i^2	ω_i/ω_j
1950. 4.27	38802	4.015	1.000	1.000
1951. 8. 6	47274	2.746	1.484	1.462
1952.11.21	34043	5.369	0.770	0.748
1954. 2.19	31847	5.994	0.674	0.670
1954. 6. 7	42296	3.390	1.188	1.185

1. 由 Kepler's 新天文學到 Newton's 原理的科學進程之简介 (A Survey on Scientific Progressions leading from Kepler's Astronomia Nova to Newton's Mathematical Principle of Natural Philosophy)

⊙ 1609：望遠鏡的發明，大幅寬展了觀測天象的精度和視野，例如 Galileo 在天文上的重要發現都是用望遠鏡之所得

⊙ Galileo (1564–1642)：重力实驗：自由落体，斜面，慣性定律，等加速運动及拋体運动

⊙ R. Descartes (1596–1650)：坐標解析幾何，慣性定律的普遍形式

⊙ Kepler 的 Rudolphine Table (1627) 要比以前的星表精準百倍，他的 Epitome of Copernican Astronomy 逐漸成為天文教本。再者他对于水星凌日(1631.11.7)和金星凌日(1631.12.6)的預測，前者由 Gassendi 觀測到而後者則因為發生在歐洲的夜晚而沒能实測。但是在 1639.12.4 Horrocks 觀測到另一次金星凌日。可惜 Kepler 都

沒能親見他的行星定律的輝煌勝利.

⊙ Huygens (1629-1695): 離心力 (centrifugal force), 圓周運动, 等

⊙ Fermat (1601-1665), Pascal (1623-1662)
Barrow (1630-1677), Wallis (1616-1703)

⊙ Hooke (1635-1703)

歷史的注记:

2. 巨著《Principia》的主要结果(概述)

⊙ 力學的基本概念：质量(mass)，动量(momentum)

惯性(inertia)，力(force) 向心力(centripedal force)

速度(velocity)，加速度(acceleration)

⊙ 力學基本定律：

第一定律：惯性定律

第二定律：$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$

第三定律：作用力和反作用力定律

⊙ Principia 的主要结果：

大体上可以概括為下列四个定理和由它们提升，總结而得的

万有引力定律 (Law of Universal Gravitation)

定理1：Kepler的面積律等價于作用力向心(或離心，亦即

$\frac{1}{2}r^2\omega =$ 常数 $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ 和 $\overrightarrow{OP}$ 反向或同向

(或 $\overrightarrow{OP} \times \vec{a} \equiv 0$)

定理2：Kepler的面積律加上椭圆律

⇒向心力的大小和距離平方成反比.

定理3：(定理2之逆向).设有質点在大小和距離平方成反比的向心(或離心)的作用力之下運动,則其軌形為一圆錐截线,以中心為其焦点之一.

定理4：一个均匀密度的球形薄壳Σ,对于其外的一个質点P的重力等于把Σ的総質量集中在球心对于P的重力.

歷史的注記：

3. 以简洁新证重访《Principia》之主要 理分析

定理1的证明：

如图1所示，相应于微小的Δt，Δ和扇形面积 $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$ 以及 $\Delta OPQ'$ 的面积之间的差别都是 Δt^2-阶的微量。所以

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \omega, \quad r = |\overrightarrow{OP}|, \ \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \Delta OPQ \text{ 的面积} = \frac{1}{2} r v \sin(\varphi-\theta), \quad v = |\vec{v}|$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} r\cos\theta, & v\cos\varphi \\ r\sin\theta, & v\sin\varphi \end{vmatrix}$$

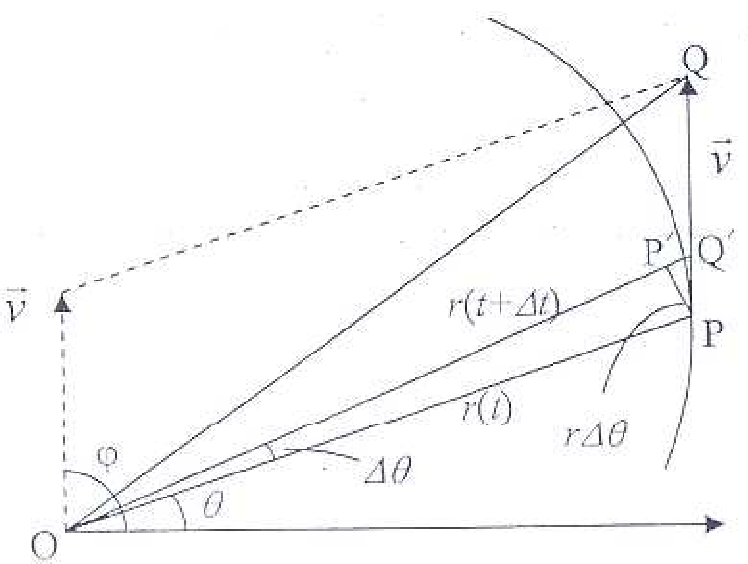


图1

所以 $\frac{dA}{dt}$ 為常数的充要条件是

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} r\cos\theta, & v\cos\varphi \\ r\sin\theta, & v\sin\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r\cos\theta, & \frac{d}{dt}v\cos\varphi \\ r\sin\theta, & \frac{d}{dt}v\sin\varphi \end{vmatrix} \equiv 0$$

$\Longleftrightarrow$ $\vec{a}=(\frac{d}{dt}v\cos\varphi, \frac{d}{dt}v\sin\varphi)$ 和 $\overrightarrow{OP}=(r\cos\theta, r\sin\theta)$

成比例(亦即反向或同向). □

<u>定理2的证明</u>:

首先,我们应该分析一下面積律和椭圆的光學性質的关系是什么?如圖2所示,面積律就是

$$v\cdot d_1 = \frac{2\pi ab}{T}$$

其中 d_1 是焦点 F_1 到切线的距離,而其光學性質理當反映在 d_1 和 F_2 到切线的距離 d_2 之间関系上.有此思想就会很容易发現 d_1 与 d_2 之间関係式就是 $d_1\cdot d_2=b^2$. 由圖2可見

$$4a^2=\overline{F_1F_2'}^2=\overline{F_1H}^2+\overline{HF_2'}^2=(d_1+d_2)^2+h^2$$

$$4c^2=\overline{F_1'F_2'}^2=\overline{F_1'H}^2+\overline{HF_2'}^2=(d_1-d_2)^2+h^2$$

$$\Rightarrow 4b^2=4a^2-4c^2=4d_1d_2, \quad d_1d_2=b^2$$

上述简潔関係实乃椭圆光學性質的直接反映

而它又和面積律配合得絲絲入扣，即有

$$v=\frac{2\pi ab}{d_1T}=\frac{2\pi a}{bT}\,\overline{F_2M_2}=\frac{\pi a}{bT}\,\overline{F_2F_2'}$$

亦即 $\vec{v}$ 的大小是 $\overrightarrow{F_2F_2'}$ 的 $\frac{\pi a}{bT}$ 倍，而且 $\vec{v}$ 的方向則比 $\overrightarrow{F_2F_2'}$ 方向多加 $\pi/2$. 由此可見加速度 $\vec{a}$ 的大小也是 $\frac{d}{dt}\overrightarrow{F_2F_2'}$ 的 $\frac{\pi a}{bT}$ 倍，而且其方向也比 $\frac{d}{dt}\overrightarrow{F_2F_2'}$ 的方向多加 $\frac{\pi}{2}$. 再者，易見

$$\overrightarrow{F_2F_2'}=\overrightarrow{F_2F_1}+\overrightarrow{F_1F_2'}\,,\quad \overrightarrow{F_1F_2'}=2a(\cos\theta,\sin\theta)$$

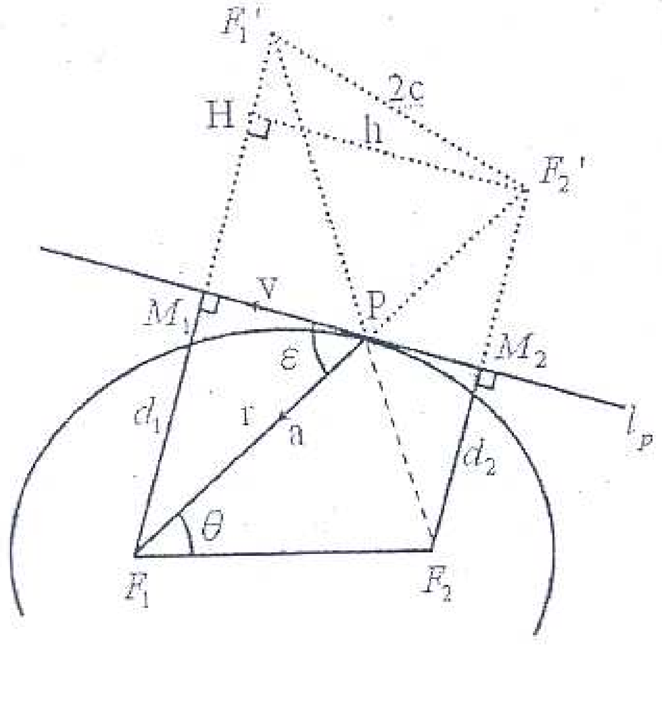
$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{F_2F_2'}=\frac{d}{dt}\overrightarrow{F_1F_2'}=2a\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\theta\right),\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\theta\right)\right)\omega$$

所以

$$\vec{a}=\frac{d}{dt}\vec{v}=\frac{2\pi a^2}{bT}\left(\cos(\pi+\theta),\sin(\pi+\theta)\right)\omega$$

$$=\frac{4\pi^2a^3}{T^2}\frac{1}{r^2}(-\cos\theta,-\sin\theta)\quad\square$$

圖2：



定理3的証明：

由所设，加速度 $\vec{a}$ 向心(或離心)而且和 r^2 成反比，亦即存在常数 K

$$\vec{a} = \frac{K}{r^2}(-\cos\theta, -\sin\theta) \quad \left(或\ \frac{K}{r^2}(\cos\theta, \sin\theta)\right)$$

再者，由定理1，$r^2\omega = 2k$，k是另一常数. 所以

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{d\theta}\vec{v}\cdot\omega = \vec{a} = \frac{K}{r^2}(-\cos\theta, -\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\vec{v} = \frac{\vec{a}}{\omega} = \frac{K}{r^2\omega}(-\cos\theta, -\sin\theta) = \frac{K}{2k}(-\cos\theta, -\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left\{\vec{v} - \frac{K}{2k}(-\sin\theta, \cos\theta)\right\} \equiv 0$$

所以两者只差一个常向量 $\vec{c}$，即有

$$\vec{v} = \frac{K}{2k}(\quad , \cos\theta) + \vec{c}$$

如图3所示，△SPQ 的面積等于

$$\frac{1}{2}r\cdot\left\{\frac{K}{2k} + \vec{c}\cdot(-\sin\theta, \cos\theta)\right\}$$

再用一次面積律，即得

$$\frac{1}{r} = \frac{K}{(2k)^2}\left\{1 + \frac{2k}{K}\vec{c}\cdot(-\sin\theta, \cos\theta)\right\}$$

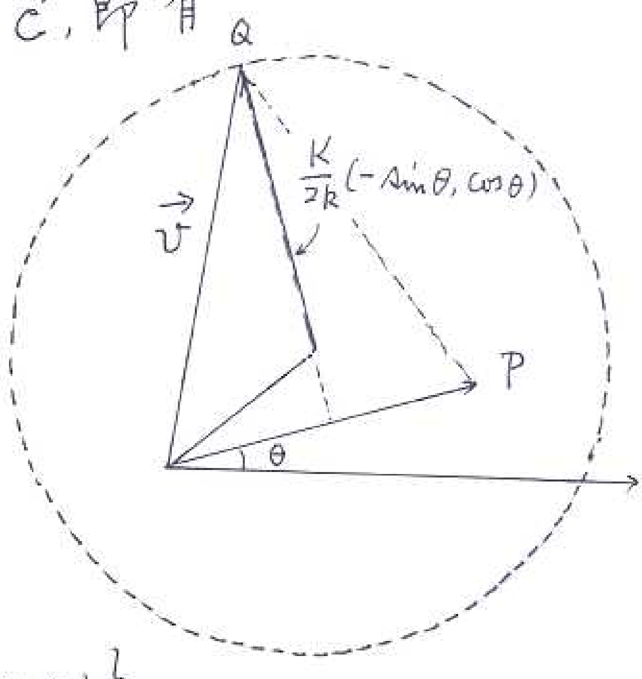


图3

它是一个偏心率為 $\frac{2k}{K}|\vec{c}|$ 的錐线方程 □

定理4的証明:

设球壳的单位面積密度為ρ,半徑為R;P点的質量為m. 取P'為$\overline{OP}$上使得$\overline{OP'}\cdot\overline{OP}=R^2$的那一点. 令$\Gamma$和$\Gamma_0$分别是$\Sigma$和以$P'$点為心的单位球面$\Sigma_0$和一个以直线$OP$為边的半平面的交截半圆(如圖4所示). 則$\Sigma$和$\Sigma_0$分别是$\Gamma$和$\Gamma_0$繞$OP$軸所成的旋轉面.

取P'点的角度φ, $0\le\varphi\le\pi$, 為積分參數, Γ上的微段$\widehat{Q_1Q_2}$所张的角為$d\varphi$, 亦即$\widehat{Q_1'Q_2'}$之弧長. 則

$\widehat{Q_1H}$之弧長為$\overline{P'Q_1}\,d\varphi$

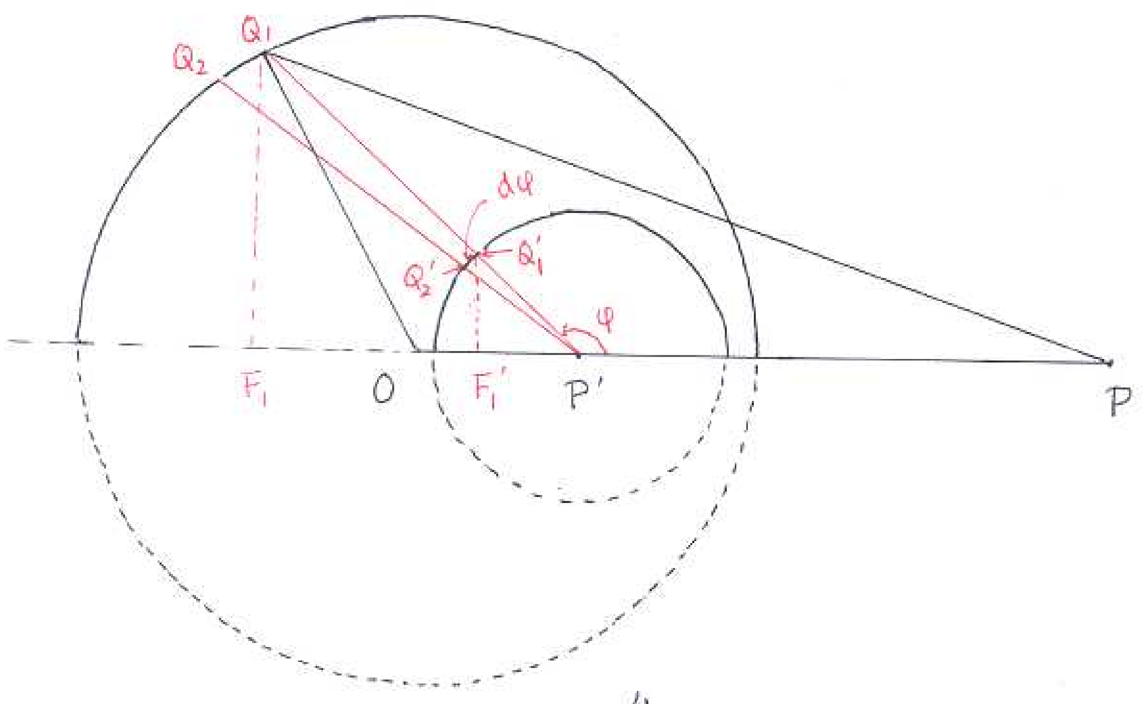


圖4

$\triangle OP'Q_1$ 和 $\triangle OQ_1P$ 相似，因為它们在 O 点公有一角而且其对应夹边边長成比例，即 $\overline{OP'}:R=R:\overline{OP}$

所以也有

$$\angle OPQ_1=\angle OQ_1P'\ (=\alpha)\ \text{和}\ \overline{Q_1P'}:\overline{Q_1P}=R:\overline{OP}$$

再者，由 $\widehat{Q_1H}\perp\overline{Q_1P'}$，$\widehat{Q_1Q_2}\perp\overline{Q_1O}$，可見微小 $\triangle HQ_1Q_2$ 在 Q_1 之角也等于 α，因此 $\widehat{Q_1Q_2}$ 的弧長為 $\widehat{Q_1H}$ 的 $\sec\alpha$ 一倍，即有

$$\widehat{Q_1Q_2}\doteq\sec\alpha\,\widehat{Q_1H}=\sec\overline{P'Q_1}\,d\varphi$$

令 $S(\widehat{Q_1Q_2})$（及 $S(\widehat{Q_1'Q_2'})$）分别是 $\widehat{Q_1Q_2}$（及 $\widehat{Q_1'Q_2'}$）在旋轉下所產生的環形窄帶，其宽分别是 $\widehat{Q_1Q_2}$（及 $\widehat{Q_1'Q_2'}$）的弧長，其長则分别是

$$2\pi\overline{Q_1F_1}=2\pi\overline{P'Q_1}\sin\varphi\ (\text{及}\ \sin\varphi\ )$$

所以它們的面積具有关系式

$$|S(\widehat{Q_1Q_2})|=\sec\alpha\cdot\overline{P'Q_1}^{\,2}\cdot|S(\widehat{Q_1'Q_2'})|$$

再者，由对称性可見 $S(\widehat{Q_1Q_2})$ 所施于質点 P 的引力是指向球心的，亦即等于其各部份的引力在 $\overrightarrow{PO}$ 方向的分力之總和，其大小為

$$\cos\alpha \cdot G \frac{|S(\widehat{Q_1Q_2})| \cdot \rho m}{\overline{Q_1P}^2} = G \frac{\overline{P'Q_1}^2 |S(\widehat{Q_1'Q_2'})| \cdot \rho m}{\overline{Q_1P}^2}$$

$$= G \cdot \frac{R^2}{\overline{OP}^2} \rho m \cdot |S(\widehat{Q_1'Q_2'})|$$

由此易見，它们的總和就是

$$G \cdot \frac{R^2}{\overline{OP}^2} \rho m \cdot \sum |S(\widehat{Q_1'Q_2'})| = G \frac{R^2}{\overline{OP}^2} \rho m \cdot 4\pi$$

$$= G \frac{4\pi R^2 \rho \cdot m}{\overline{OP}^2} = G \frac{M \cdot m}{\overline{OP}^2} . \square$$

歷史的注记.

IV. 回顧與展望

⊙ 理性文明 (civilization of rational mind)

由纪前第六、五世纪一直到十七世纪，

幾何学 ⟷ 天文學 ⟷ 物理学

实為主角與主軸，而太陽系行星运行之千古之谜则是貫串全局的一个主题

⊙ 三大里程碑 (Three monumental achievements)

(1) Hippasus, Eudoxus

幾何基礎论，連續性的认知與分析之奠基

(2) Copernicus, Tycho, Kepler

新天文學，行星三定律

(3) Kepler, Galileo, Descarte, Newton (Principia)

天上人间，合而為一：萬有引力定律

三者各有其迷途知返，才能得見精深

⊙ 面積律：

⊙ 数理分析所扮演的角色：