

# Adaptive mesh による 2 次元非粘性ブシネ近似方程式の有限時間発散シミュレーション

Simulation of finite time divergence in 2D Boussinesq equation by adaptive mesh code

○山田 良透 (京大理)、宮下 尚 (京大理)、藤 定義 (京大理)、松本 剛 (京大理)

Yoshiyuki Yamada, MIYASHITA Hisashi, Sadayoshi Toh, and Tsuyoshi Matsumoto  
Department of Physics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

We investigate the possibility of finite time divergence in 2D inviscid fluid by an adaptive mesh code. We can use  $2^{21}$  grids in each direction effectively. Our results suggests that the temperature gradient and vorticity diverges as  $(t_0 - t)^{-2}$  and  $(t_0 - t)^{-1}$  respectively. At the initial stage, temperature vorticity seets is formed which is known to grow exponentially at most. We can observe the instability of the seat, which is considered as the source of finite time divergence.

## 1 背景

乱流の普遍的性質と非粘性系の解の有限時間発散との関連性から、有限時間発散の可能性を探る研究は少ない。しかしながら、計算機能力の限界と理論的な裏付けが得られないことから、現在のところ決定的な結論は出ていない。本講演では、最近著者等により詳細に調べられている、2次元ブシネ近似方程式の乱流と非粘性での特異性の可能性について紹介する [1, 2]。2次元ブシネ方程式 (以下 2DFC と略す) は、以下の様に浮力項のみ圧縮性を考慮するブシネ近似を用い温度と速度場が結合している:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p - \alpha g T \mathbf{e}_y + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (2)$$

ここで、 $\nu$  と  $\kappa$  はそれぞれ動粘性率と熱拡散係数で、 $\alpha$ 、 $g$  は体積膨張率と重力加速度の大きさを表し、 $\mathbf{e}_y$  を  $y$  軸方向の単位ベクトルとすると重力の方向は  $y$  軸下向きとなる。一般性を失うことなく  $\alpha g$  を 1 とできる。また、既に平均密度  $\rho_0$  は、1 と置いている。

ベクトル量  $\chi = \left( \frac{\partial T}{\partial y}, -\frac{\partial T}{\partial x} \right)$  (以下  $T$  渦と呼ぶ) は 3次元ナビエ・ストークス系 (以下 3DNS と略す) の渦度の従う式と同等である。また、2DFC 乱流でも間欠性が存在し、間欠性指数と微細秩序  $T$  渦構造が密接に関連していることが調べられている。Pumir と Siggia は [3]、旋回流の局所近似としてオイラー方程式から非粘性 2次元ブシネ近似方程式が直接導けることを示した。

## 2 非粘性ブシネ方程式の有限時間発散可能性

### 2.1 有限時間発散を調べる理由

3次元ナビエ・ストークス方程式及びオイラー方程式の有限時間発散可能性は乱流の基礎的理解や数学的な興味から詳細に調べられて来たが、今だ結論は得られていない。我々は、3DNS 乱流と類似の性質を持つ 2DFC 乱流が従う基礎方程式の非粘性形である 2次元非粘性ブシネ方程式の有限時間発散可能性を新しい数値計算法 (AMR) を用いて調べ、その存在の可能性を強く示唆する結果を得た。

基礎方程式は、以下のように式 (1)、(2) で粘性項を除

いた非粘性ブシネ近似方程式である:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p - \alpha g T \mathbf{e}_y. \quad (4)$$

我々が、非粘性 2DFC 方程式の特異性に興味を持つのは以下の 3つの理由からである。(1) K41 の理論が非粘性極限 ( $\nu \rightarrow 0$ ) で発散を示唆している、(2) 間欠性は特異性を基礎としており、有限時間発散解と何らかの関連がある、(3) 数学的な興味。

### 2.2 数値計算スキーム

我々は、高精度の空間解像度を得るために、adaptive mesh refinement (AMR) 法を用いた。加えて、時間発展に対し精度を高めるため、我々が開発したリワインド (rewind ; 巻戻し) と呼ぶ手法を用いた。この計算での格子間隔は、一次元方向に最大計算領域に対して  $2 \times 10^6$  である。

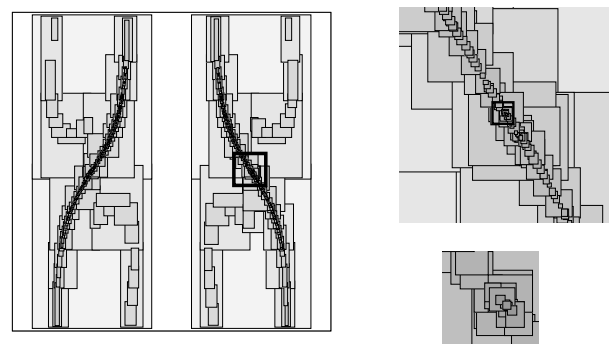


Fig. 1: レベル生成の一例: 15 段のレベルを積んだ状態。図中の太線で囲われた領域を拡大して表示している。強いフロントが形成されている所に細かいメッシュが集中している。

各格子での時間発展スキームは、空間方向の差分に TVD 条件を満たす 2 次の MUSCLE 法 [6] を、また時間発展には 2 次のルンゲ・クッタ法を用いた。ポアソン方程式の解法には、2 次精度の SCG 法を用いている。空間差分の精度を一致させるためには、高次差分を用いる必要がある。また、高いレベルの情報が低いレベルにフィー

ドバックされる効果も採り入れる必要があるかもしれないが、今回は無視した。境界条件は  $x, y$  方向とも周期  $2\pi$  の周期境界条件を用いた。重力は、 $y$  軸方向下向きに取っている。

### 3 結果

図2に、 $|\nabla T|$  と  $\omega$  の最大値の時間発展を示した。  $2 < t < 4$  の範囲で指数関数的増大が起きていることを示している。その後、増大は加速される。我々は、非粘性2DFC方程式の発散を仮定したときのスケージングは Beale, Kato & Majda [4] あるいは E & Shu [5] らにより調べられており、これらを用いてフィットした。結果は、発散時刻  $t_0$  の選び方に依存するが、増大は少くとも4重の指数関数より速いことは確認している。従って、この結果は有限時間発散を示唆していると見做せるであろう。

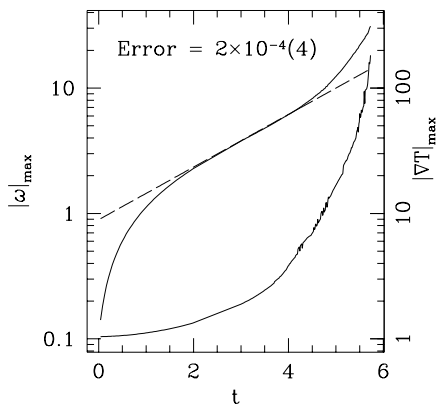


Fig. 2: log-linear プロット。左側の実線が  $|\omega|_{\max}$ 、右側の線が  $|\nabla T|_{\max}$  の変化を表す。破線は直線で、 $2 < t < 4$  の間は指数増大で良くフィットできるが、 $t > 4$  では指数増大より大きな増大が起きていることを示す。

$T$  渦層は更に発展するが、その強さは渦層に沿って一様でない。図3に、各  $x$  毎の温度勾配のピークの位置を線で結んだものを示す。明らかに  $T$  渦層は分裂しており、前段階の指数関数的な発展で形成された  $T$  渦層が不安定化し、さらに非線形発展して局所的に分裂した構造に発達するように思われる。この実空間での  $T$  渦層の不安定化以降の発展が、巾発散ステージに対応している。

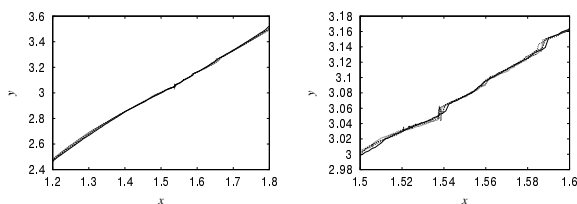


Fig. 3: ピークの位置の時間変化。右は拡大図。

### 4 まとめと課題

今回の計算により、2次元非粘性ブシネ近似方程式系では、2段階の時間発展を示すことが強く示唆される結果を得た。前段階では、 $T$  渦層の発達に対応し、諸量は指数関数的に増大する。更に次の段階では、発達した  $T$  渦層が不安定化し巾的な発散が起こる。現在温度勾配のピークに沿った物理量の時間変化を解析している。図4は、ピークの線上での温度勾配の最大値の時間変化を示したものである。これを見ると、この不安定化過程は自己相似的により小さなスケールで繰り返し起こり、 $T$  渦層のフラクタル化を導くように思われる。しかし、フラクタル化は、まだ確認されておらず仮定にすぎない。何か示唆が得られる可能性がある。

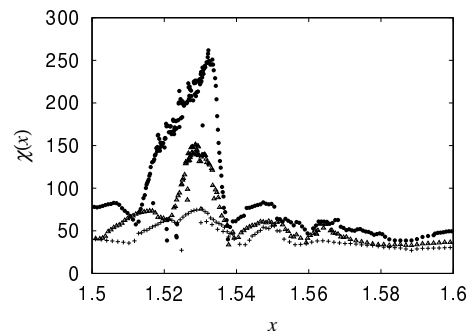


Fig. 4: ピークの  $x$  座標とその点での  $\chi$  の値の時間変化。

$T$  渦層の不安定化が重要な役割を果たしているが、この不安定化が初期に含まれる攪乱によるものか、あるいはスキームに由来する数値的な誤差なのかは現状では区別できない。今後、不安定化過程を詳細に調べることから、発散の物理的な機構を明らかにしていく予定である。本研究で用いたスキームは高精度で強力であるが、ポアソン方程式の解法に若干の不安がある。上部レベルの影響を下部にフィードバックさせる改良が有効かも知れないが、これについては現在コードの実装作業に入っている。

非粘性での特異性の存在と乱流特性との関係は必ずしも自明ではない。この点は今後の課題である。

### 参考文献

- [1] Toh, S. and Suzuki, E. (1994), *Phys. Rev. Lett.*, **73**, pp. 1501-1505
- [2] Toh, S. and Matsumoto, T.: *IUTAM Symposium on Geometry and Statistics of Turbulence* (eds. Kambe, T., Nakano, T. and Miyauchi, T., Kluwer Academic Publishers, 2000) 279
- [3] Pumir, A. and Siggia, E.D. : *Phys. Fluids*, **A4** (1992) 1472
- [4] Beal, T., Kato, T., and Majda, A.: *Commun. Math Phys.* **94** (1984) 61
- [5] E, W. and Shu, C.W.: *Phys. Fluids* **6** (1994) 49
- [6] van Leer, B.: *J. Comput. Phys.* **32** (1979) 101
- [7] Constantin, P., Nie, Q., and Schörghoher *Phys. Rev. E* **60** (1999) 28583; 及びこの論文の参考論文を参照