基礎數學系列選講，第一卷：
從算術到代數，再邁向微積分

項武義

May 24, 2011

Contents

引言

理性文明（Civilization of rational mind）乃是世代相承，精益求精對於大自然的本質的認知。概括來說，大自然的事物與現象是極為多樣而且變化無窮的，但是其內在的本質卻又具有精簡的原理和規律。所以唯有穿透表象，探求本質，才能認知其精簡，而這種由表及裡的基本方法就是**定量分析**（quantitative analysis）。這也就是為什麼基礎數學在理性文明的全程發展中，一直扮演著重要的角色，而代數、幾何與分析則是基礎數學的三大支柱。代數學的根基在於數的運算，是定量分析，有效能算的基本功。幾何學則是對於我們生活所在的空間本質的認知與深入理解，而分析學則是研究變動事物與現象的「變量數學」，它是代數和幾何的自然結合才發展而得的數學，其基礎理論就是微積分。

Chapter 1

從算術到代數：由韓信點兵講起

一般來說，學習數學的啓蒙階段通常是先學正整數的四則運算，再學四則應用題的如雞兔同籠，時鐘問題等等，然後再進而學習初等代數。其實，從算術到代數也就是在這方面的基礎數學的自然進化歷程。由此可見，在研討代數學的起始，理當歸本究源探討由算術到代數的進步何在？之所以能脱胎換骨的突破性思想又是些什麼？

1.1 大巧若拙的運算律，由韓信點兵法講起

歸根究底，計量數學的根本在於**正整數系**（亦稱之謂**自然系數**）的**四則運算**（亦即$+$、$-$、$\times$、$\div$）。它乃是由**數個數**（counting）的需要自然而然構造而成的精簡體系，其中最為基本的結構就是「$+1$」；「$+a$」乃是把「$+1$」重複做 a 次的複合，「$k\cdot a$」則是 k 個 a 自相加的結果；a^ℓ乃是 ℓ 個 a 自相乘的所得（參看第三卷第一講）。如此逐步歸納建構而成的正整數系，就是我們從小學開始，即已熟習慣用具有一系列**優良運算律**（亦即：加、乘的**交換律**、**結合律**和**分配律，指數定則**）的正整數系，例如乘對於加的**分配律**

$$m\cdot a+n\cdot a=(m+n)\cdot a\text{，}$$

其實就是「m 個 a 的自相加」再加以「n 個 a 的自相加」等於「$(m+n)$ 個 a 的自相加」的精簡表述，它乃是乘法植根於加法的具體總結。同樣的，指數定則

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}\text{，}$$

也就是乘方的本質是「自相乘」的精簡表述與具體總結。

總而言之，上述這一系列運算律是對於任何正整數都**普遍成立**的，它們簡樸扼要地總結了正整數系整體結構的完美**通性**，易算好用，是整個計量數學之「大巧若拙」！特別是**分配律**乃是四則運算的精要所在。

1.1.1 韓信點兵法，善用分配律的啓蒙者

在代數運算上，我們對於上述系列運算律當然都不分彼此地一起運用，但是其中以分配律最為重要、有力，而且它的用場和用法上也特別有講究，在很多代數問題的研究上，是否能善用分配律往往就是成敗的關鍵。在這一點，中國古算中有一個獨到的創見「**韓信點兵法**」，它也就是在數論中具有基本重要性的**中國剩餘定理**（Chinese remainder theorem）。

我們先來介紹一個引人入勝的傳說：話說當年（楚漢相爭），韓信是劉邦的大將。有一天，劉邦親臨韓信的軍營，而在兵場上約有二千名士兵在操練。韓信命令士兵們先

後以七人一組、十一人一組及十三人一組結集成小組，並把每次餘下不能組成七（或十一、十三）人小組的人數報上，然後他便可以快速地算出士兵的確切數目，例如，在組七人小組時餘下 3 人，組十一人小組時餘下 4 人，組十三人小組時餘下 8 人，韓信很快便算出其確切數目是 1,984 人；其後用一個跟著一個點的費時數法確認了人數正是 1,984，而且當中更包括一些由劉邦暗中吩咐混入士兵們中的數名近衛軍，以防韓信事前已知道士兵數目的可能性。故事我們就只説到這裡，接著讓我們來討論上述「韓信點兵法」背後的數學內涵。

韓信點兵法在數學方面的分析

(i) 設 x 為士兵數目，則當 x 除以 7、11、13 時的餘數便分別是 3、4、8（簡稱餘數集為 $(3,4,8)$）。首先要注意，上述條件並不能唯一地確定 x 的值，但若兩數 x 與 x' 具有相同的餘數集，則兩者的差別乃是一個 $7\times 11\times 13 = 1001$ 的倍數，因此，韓信很容易就可以選定其中最接近粗估其人數約為 2,000 的那個 x 為答案。

(ii) 設 x_1、x_2、x_3 分別是以 $(1,0,0)$、$(0,1,0)$、$(0,0,1)$ 為餘數集而且小於 1,001 的解。根據假設 x_1 是 $11\times 13 = 143$ 的倍數，即 $x_1 = 143\cdot y_1$，不難求出 $y_1 = 5$，即得 $x_1 = 715$。同理，$x_2 = 7\times 13\cdot y_2 = 91\cdot y_2$，$y_2 = 4$，即得 $x_2 = 364$；$x_3 = 7\times 11\cdot y_3 = 77\cdot y_3$，$y_3 = 12$，即得 $x_3 = 924$。x_1、x_2、x_3 便是韓信預先早已算妥並記在心中的數（腦中有數）。

(iii) 跟著由分配律可直接得出 $r_1\cdot x_1 + r_2\cdot x_2 + r_3\cdot x_3$ 的餘數集便是 (r_1,r_2,r_3)。其中 $0\le r_1 < 7$，$0\le r_2 < 11$，$0\le r_3 < 13$。在上述例子中，$(r_1,r_2,r_3) = (3,4,8)$，所以韓信很快便能計算出 x 的值是 1,984。

韓信點兵法的基本想法和啓示

現在讓我們來剖析一下「韓信點兵法」的基本想法和這樣一個成功範例所展現的啓示。

基本想法：在求解剩餘問題時，當餘數之中只有一個是 1，其他皆為 0 的特殊情形，不但容易解答，而且可以用這一系列特殊解，把一般情形的解答簡潔地用下述公式表達之。

設 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是對於給定一組公因數為 1（即互質）的除數 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，其餘數組分別是 $(1,0,\cdots,0)$，$(0,1,0,\cdots,0)$，$\cdots$，$(0,\cdots,0,1)$ 的特殊解，則

$$x = r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_kx_k \tag{1.1}$$

就是一個餘數組是 $(r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 的解，而且任何以 $(r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 為餘數組的解和上述 x 相差一個 $a_1a_2\cdots a_k$ 的整數倍。

上述公式 (1.1) 之所以普遍成立的理由就是分配律。由分配律可見 r_ix_i 被 a_i 除的餘數是 r_i，而且 $x - r_ix_i = \sum_{j\neq i} r_jx_j$ 被 a_i 除的餘數是 0（因為每一個 r_jx_j，$j\neq i$，都含有因數 a_i）。由此可見，上述算法的基本思想就是善用分配律，把剩餘問題的一般情形，直截了當地歸於易解好算的特殊形來系統解答之。

有鑒於韓信是楚漢相爭時代的大將軍，在此不妨借用軍事術語來比喻上述基本思想：假如我們把剩餘問題看做「戰場的全局」的話，則那些特殊餘數組的解就是能夠簡明扼要地控制全局的「戰略要點」。所以上述分解組合由特殊解去全局控制一般解的想法，的確展現了韓信在認識和解決問題上的「大將風範」。他給我們的一般性啓示大致如下：

> 當我們在研討某一種問題，不宜拘泥也不必局限於原給的問題，而是要把它放到恰到好處的廣度和範疇之中去處理。唯有這樣才有可能把同類的問題妥善地組織起來（例如在剩餘問題中由分配律的運用所得的 (1.1) 式），然後再用這種組織去實現分解組合系統解答的戰略思想。

當然，如何將某一種問題相應的廣度和範疇確定得恰到好處與如何把所選定的全局妥善組織起來是密切相關的。此事一來隨著待解的問題而定，二來也由解題者對該問題的認識深度而定，所以既無定規，也難以有一概而論，但是在基礎數學中卻自然而然地有好些基本常用的問題，也都可以同樣地用分配律加以組織，使得一般解和特殊解之間的關係也和 (1.1) 式同樣地是一種倍數組合（或稱為線性組合）。這一類問題統稱為線性問題。研究有效解答線性問題，並且拓展其應用的課題則叫做**線性代數**（Linear Algebra），這其實就是我們在大學基礎數學課程中所要研討的一個中心課題，而且它也是在整個數學中一個最廣泛有用的精簡所在。

總結上面這一段討論，可以說線性代數的基本想法就是系統地運用分配律去解決各種各樣線性問題。而這種善用分配律去解決線性問題的基本方法和思路，業已在韓信點兵法中充分體現，簡明扼要地表達得「淋浴盡致」。由此可知，線性代數的基本方法，實際上是起源於中國古算的「中華祖法」。

【歷史的註記】：在現知的文獻中，此法在東漢的《孫子（並非春秋戰國之孫武）算經》論及，所以此法亦稱孫子算法。

1.2 解代數方程原理，系統運用運算律的啓蒙者

我們在小學時學習算術，在初中時進而學習代數。在數學的發展史中，代數是由算術進步而來的。現在讓我們來剖析一下，從算術到代數的進步，其要點何在？突破點何在？回顧當年，在小學算術中所學的四則應用題，如年齡問題、雞兔同籠問題等，大體上來說，當時是通過對每一類型的問題詳加分析，個別地求得其所針對的公式來加以解答的。但是到了初中代數，這些多樣的四則題統統都可以用簡單的線性方程組加以解答。其中究竟使了什麼「巧妙」呢？驟看起來，其妙處好像在於引進了「未知數」符號（unknown）。例如在雞兔問題中，可以用 x, y 分別表示「兔數」與「雞數」，則所給問題中的數量關係可以列成兩個方程式，即

$$\begin{cases} x+y=\text{頭數}， \\ 4x+2y=\text{足數}。 \end{cases}$$

在算術中雖然不用 x, y 這種符號，卻也可以同樣地寫下

$$\begin{cases} \text{兔數}+\text{雞數}=\text{頭數}， \\ 4\times\text{兔數}+2\times\text{雞數}=\text{足數}。 \end{cases}$$

由此可見，到此為止，代數和算術毫無本質上的差別。其實，代數解法的真正妙處並不在於引進未知數符號和列方程式，而是在於能夠由代數方程去解得未知數所應有的值！現在讓我們以頭數、足數分別是 15 和 38 為例，來分析一下代數解法和算術解法的差別。

(i) **代數解法**：用第一式解得 $y=15-x$，代入第二式即得

$$4x+2\cdot(15-x)=38。$$

用分配律將上式簡化，即得

$$4x+30-2x=2x+30=38 \quad\Longrightarrow\quad 2x=38-30=8 \quad\Longrightarrow\quad x=4。$$

(ii) **算術解法**：若籠中全部是雞（即 15 隻），則足數應為 $2 \times 15 = 30$。今逐一以兔換雞，則頭數保持不變而足數則每次增加 2。由此可見，要使足數由 30 增加到 38，所以做的更換次數是 $(38-30) \div 2 = 4$，這樣就求得兔數 $= 4$。

【比較分析】在代數解法中，我們用運算律和「移項」即可解得 x, y 所應有之值（化未知為已知）！而在算術解法中，老師其實早已「心中有式」，即

$$兔數 = (足數 - 2 \times 頭數) \div 2，$$

然後再用上述這樣一套「說詞」來解釋其合理性。這裡也許讀者會問：「那麼老師『心中有式』的上述公式究竟是如何想到的呢？」此事大致有兩種途徑，其一是用代數方程求解而得，即

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x+y=a \\ 4x+2y=b \end{cases} \quad &\Longrightarrow \quad 2x+2(a-x)=b \\
&\Longrightarrow \quad 2x = b-2a \quad \Longrightarrow \quad x=(b-2a)\div 2；
\end{aligned}$$

其二是由實驗歸納而得，即

兔數	雞數	足數
0	a	$2a$
1	$a-1$	$2a+2$
2	$a-2$	$2a+4$
3	$a-3$	$2a+6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

上面所討論的雖然只是一個簡單的實例，但是我們已經可以看到兩種解法的真正區別：在算術中未能有效利用運算律，而代數則有系統地用運算律去簡化給定的數量關係，從而化未知為已知。要把這個區別認識得更加清楚一些，請讀者再回想一下，在小學時學習算術四則運算，是不是有一個口訣：「先算小括號，再算中括號，然後算大括號。」總之，在算術四則中，括號是由裡及外，逐步去括號來加以計算的。這種算法在括號中含有未知量時，例如 $4x + 2 \cdot (15 - x) = 38$，就行不通了；而在代數中，我們可以用分配律把 $2 \cdot (15 - x)$ 改寫成 $(30 - 2x)$。這叫做「窮則變，變則通！」

上述「變則通」的原理如下：在算式中的未知數在尚未解出其應有之值之前，雖然不知其值為多少，但肯定是一個數，所以那種對於任何數皆普遍成立的運算律是肯定可用的。其中最為有力者是分配律，它使得算式中的括號可去、可加，不會因為某一括號中含有未知量而「受阻」，這也就是**解代數方程式的基本原理**！這才是算術與代數真正的分野！

可以這麼說，在算術年代，是沒學會用分配律的「石器時代」；到了代數，則進步到大用運算律（特別是分配律）的「銅器時代」。在這裡，我們還要再談一談「引進未知數符號」這個舉措的真正好處與意義。

由上述分析可見，解代數方程式的基本原理在於系統地用運算律，把含有未知量的算式加以簡化、分析。引進符號如 x, y, z 等來表達未知量的做法就是要把上述原理具體化、形象化；也即未知數就是那種在運算上滿足運算律的符號。這樣做，就使得我們在對「未知量」使用運算律時「有的放矢」（未知數符號是「的」，運算律是「矢」），運用起來自然更能得心應手。再者「代數」這個名詞，顧名思義，乃是因為這種以符號代表未知數等做法在代數學中廣泛運用而得名。其實，這種做法的真正好處在於使得對於各種各樣具有數系通性的事物如未知數、變數、待定係數等等，能夠有的放矢地運用

運算律，得以正規化、系統化。在中學代數中所學的多項式運算就是這個做法的具體形式。

【歷史的註記】：多項式的引進，起始於 Viete（1504–1603）。在數學史中通常稱之謂 symbolic computation。其實，它的思想根源在於上述解代數方程原理。再者，這種做法在宋元時代的天元術，業已初步展現其端倪。

1.3 多項式、餘式定理與插值公式

有鑒於上一節所討論的解代數方程的原理，在於認識到運算律是對於任何數皆普遍成立者，所以在代數方程中**待解未知量**也當然適用！而且解代數方程的基本思想就是有系統地運用運算律把未知量所滿足的方程式簡化，從而化「未知」為「可知」。把這種基本想法系統化，具體化的架構就是我們通常在代數學中所必學的**多項式**運算。其實，多項式中 x, y, z 等所表示者就是具有**數系通性**（亦即運算上滿足運算律）的符號（稱之謂**不完元**（indeterminants）者）。再者，在多項式之中，最為簡單者當然是**單元多項式**。其實它也是最為好用、有用的特例和起步。有鑒於此，本節將先行討論單元多項式作為由算術到代數的起點。

1.3.1 單元多項式的值與根，餘式定理及其推論

設 $f(x)$ 是一個給定多項式，即

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n \left(= \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \right)，\qquad c_n \neq 0，$$

若將 x 以 a 代入上式，即得其在 $x = a$ 之值，將以 $f(a)$ 記，即：

$$f(a) = \sum_{i=0}^{n} c_i a^i，$$

易見

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i - \sum_{i=0}^{n} c_i a^i = \sum_{i=0}^{n} c_i \big(x^i - a^i\big)，$$

再者，有下列簡單的公式，即

$$\begin{aligned}
&x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)，\\
&x^3 - a^3 = (x-a)\big(x^2 + ax + a^2\big)，\\
&x^i - a^i = (x-a)\big(x^{i-1} + ax^{i-2} + \cdots + a^{i-1}\big)，等等，
\end{aligned}$$

所以就有

$$\begin{aligned}
&f(x) - f(a) = (x-a)\cdot q(x)，\\
&q(x) = c_1 + c_2(x-a) + \cdots + c_n(x^{n-1} + \cdots + a^{n-1})。
\end{aligned}$$

這也就是簡單但是基本的餘式定理：

定理 1.1　餘式定理

$f(x)$ 除以 $(x-a)$ 的餘式等於 $f(a)$，即

$$f(x) = (x-a)\cdot q(x) + f(a)。$$

推論 1　$f(x)$ 含有因式 $(x-a)$ 的充要條件是 $f(a)=0$（通常稱使得 $f(a)=0$ 之 a 為 $f(x)$ 的根）。

推論 2　$f(x)$ 含有 k 個相異的根 $\{a_i,\ 1\le i\le k\}$ 的充要條件是 $f(x)$ 含有因式：

$$(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdots(x-a_k)。$$

推論 3　一個 n 次多項式至多只有 n 個相異之根。

推論 4　一個 n 次多項式 $f(x)$ 被其在 $(n+1)$ 個點之值所唯一決定，亦即若有兩個 n 次多項式 $f(x)$ 和 $g(x)$，它們在 $(n+1)$ 個點 $\{a_j, 0\le j\le n\}$ 的值相等，亦即 $f(a_j)=g(a_j)$，$0\le j\le n$，則 $f(x)\equiv g(x)$。

證明

令 $h(x)=f(x)-g(x)$，則 $h(x)$ 的次數至多為 n，但是由所設 $h(a_j)=f(a_j)-g(a_j)=0$，$0\le j\le n$。所以由推論 3 可見 $h(x)=0$，亦即 $f(x)=g(x)$。

1.3.2　韓信點兵法和插值公式

在 1.1 中所提到的「韓信點兵法」，乃是有系統地把餘數問題歸結到一組簡樸的特殊解而加以組合，是一種善用分配律的解題方法。現在讓我們先重溫一下「韓信點兵法」的基本想法。

在求解剩餘問題時，當餘數之中只有一個是 1，其他皆為 0 的特殊情形，不但容易解答，而且可以用這一系列特殊解，把一般情形的解答簡潔地用下述公式表達之。設 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是對於給定一組公因子為 1（也即互質）的除數 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，其餘數組分別是 $(1,0,\cdots,0)$，$(0,1,0,\cdots,0)$，$\cdots$，$(0,\cdots,0,1)$ 的特殊解，則

$$x = r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_kx_k \tag{1.2}$$

是一個餘數組是 $(r_1,r_2,\cdots,r_k)$ 的解，而且任何 $(r_1,r_2,\cdots,r_k)$ 以為餘數組的解和上述 x 相差一個 $a_1a_2\cdots a_k$ 的整數倍。上述公式 (1.2) 之所以普遍成立的理由就是分配律。由分配律可見 r_ix_i 被 a_i 除的餘數是 r_i，而且 $x-r_ix_i=\sum_{j\ne i} r_jx_j$ 被 a_i 除的餘數是 0（因為每一個 r_jx_j $(j\ne i)$ 都含有因子 a_i）。由此可見，上述算法的基本思想就是善用分配律，把剩餘問題的一般情形，直截了當地歸於易解好算的特殊情形來系統解答。

在數論裡，這是一個很重要的基本定理，稱作「中國剩餘定理」。現在讓我們再次運用這種大巧若拙的算法來研究多項式函數的插值問題。

插值公式（interpolation formula）

為簡化討論起見，我們考慮 $n=3$ 作為典型情況討論之。由於解法可以作明顯的推廣（就像餘數問題一樣），我們可以沿用同樣方法求得在一般情況下的結果。

設 $\{a_0,a_1,a_2,a_3\}$ 為四個相異位置，$\{b_0,b_1,b_2,b_3\}$ 為四個任意給定數值。相當於推論 4 的唯一性，自然要問下述存在性問題，即是否存在一個次數不高於 3 的多項式函數 $y=f(x)$，它在 $\{a_0,a_1,a_2,a_3\}$ 上的值恰好就是 $\{b_0,b_1,b_2,b_3\}$？現在我們就用「韓信點兵法」的想法來寫下上述所求的多項式 $f(x)$，直截了當地說明其存在性。

注意當 $f(x)$ 被除以 $(x-a_i)$ 時，其餘數就是 $f(a_i)=b_i$，$o\le i\le 3$（詳見定理 1.1 的證明）。因此上述插值問題只是「餘數問題」的直接推廣，即由整數除法推廣至多項式除法，而現在的除式就是 $\{(x-a_i);\ 0\le i\le 3\}$。所以，我們的祖先業已教導我們應先討論一些特殊的情況，即 $\{b_0,b_1,b_2,b_3\}$ 分別為 $(1,0,0,0)$、$(0,1,0,0)$、$(0,0,1,0)$、$(0,0,0,1)$ 這四種情況。令 $f_i(x)$ $(0\le i\le 3)$ 分別為具有上述餘數集的 3 次多項式。那麼 $f_0(x)$ 是 $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ 的倍式，也即

$$f_0(x)=c(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\text{。} \tag{1.3}$$

由假設 $f_0(a_0)=1$ 得

$$1=f_0(a_0)=c(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)\text{，} \tag{1.4}$$

因此 $c=[(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)]^{-1}$，也即

$$f_0(x)=\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)}\text{。} \tag{1.5}$$

同理可得

$$f_1(x)=\frac{(x-a_0)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)}\text{，}$$
$$f_2(x)=\frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)}\text{，}$$
$$f_3(x)=\frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}\text{。}$$

到此階段，前述的插值問題的解答已是「呼之欲出」，即

$$f(x)=b_0f_0(x)+b_1f_1(x)+b_2f_2(x)+b_3f_3(x)\text{，} \tag{1.6}$$

就是我們所要求的多項式。上述想法顯然可以推廣至任意 $(n+1)$ 個相異位置 $\{a_i,\ 0\le i\le n\}$ 的情況，我們將其結論寫成下述定理：

定理 1.2　拉格朗日插值公式（Lagrange interpolation formula）

設 $\{a_i,\ 0\le i\le 0\}$ 為任意給定的相異位置，$\{b_i, 0\le i\le n\}$ 為任意給定的數值（不必相異），則存在唯一的次數不高於 n 的多項式 $f(x)$，使得 $f(a_i)=b_i$，$0\le i\le n$。再者，$f(x)$ 的明確表達式就是：

$$f(x)=b_0f_0(x)+b_1f_1(x)+\cdots+b_nf_n(x)=\sum_{i=0}^{n}b_if_i(x)\text{，} \tag{1.7}$$

其中

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= \frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\cdots(a_0-a_n)} \\
&= \frac{\prod_{i\neq j}(x-a_i)}{\prod_{i=1}(a_0-a_i)}\text{，} \\
&\cdots\cdots \\
f_j(x) &= \frac{\prod_{i\neq j}(x-a_i)}{\prod_{i\neq j}(a_j-a_i)}\text{，} \\
&\cdots\cdots \\
f_n(x) &= \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(x-a_i)}{\prod_{i=0}^{n-1}(a_n-a_i)}\text{。}
\end{aligned}
$$

【註】

(i) 推導上述公式的方法和討論 $n=3$ 時的方法是完全一樣的；而唯一有別的地方就是要改用和、積記號如 $\sum_{i=0}^{n}$、$\prod_{i\neq j}$。

(ii) $\{a_i;\ 0\leq i\leq n\}$ 為相異的條件保證了每個出現在公式分母中的乘積 $\prod_{i\neq j}(a_j-a_i)$ 皆不為 0。

(iii) $\{a_i\}$、$\{b_i\}$、$\{f_i(x)\}$ 和 $f(x)$ 之間的關係可以簡潔地用下表表示之： 而結論 $f(x)=$

x	a_0	a_1	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_n
$f_0(x)$	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0
$f_1(x)$	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$f_i(x)$	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$f_n(x)$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f(x)$	b_0	b_1	$\cdots$	b_i	$\cdots$	b_n

$\sum_{i=0}^{n} b_i f_i(x)$ 則可以由下述公式

$$f(a_j)=\sum_{i=0}^{n} b_i f_i(a_j)=b_i$$

得出，因為 $f_j(a_j)=1$，而對於其他所有 $i\neq j$ 而言，$f_i(a_j)=0$。

(iv) 上述的插值公式讓我們可以扎一個「尚待確定」的多項式，用它在不同地方的值直截了當地寫下來。這個尚待確定的多項式往往就是一些未知的理論公式或實驗公式，所以插值公式不管在理論上或實際應用上都是很重要的。在下一節的討論中，我們將會應用插值法來研究「求和公式」的性質和其明確表達式。

Chapter 2

單元多項式的基本性質與基本定理

單元多項式是多項式中最為簡單、好用、有用的部份。本講將概述其基本性質和基本定理。在基礎數學的整體來看，單元多項式是邁向微積分的簡潔、自然的途徑（參看第三講）。其實多項式本身，兼具**函數**和**代數式**相輔相成的這樣兩種本質。

2.1 單元多項式函數的基本性質

對於一個給定多項式 $f(x)$，把它想變元 y 在 x 點的函數值的表達式，即為多項式函數 $y = f(x)$。它是各種各樣函數之中最為簡單的一種，其「因變數」之值可以用表式 $f(x)$ 直截了當地計算而得。在 1.3 中的餘式定理簡明扼要地說明了「式的觀點」和函數值之間的簡潔關聯，而推論 4 和插值公式則明確了一個 n 次多項式函數被它在 $(n+1)$ **個點的函數值所決定**的**唯一性**和直接可算的**存在性**。這就是多項式函數**特有的重要基本性質**，讓我們在此再作進一層的研討。

2.1.1 插值法的應用之一：求和公式

解代數方程是代數學的啓蒙所在，其所求解者乃是滿足某些代數方程和「未知數」（unknown）。而代數學進一層次的問題則是「**求公式**」，其所探求者乃是某些問題所涉及的「未知公式」。在這方面的基本方法就是**插值法**（method of interpolation）。它有效地運用上述多項函數的基本性質，由所待求的「未知式」在足夠點應有之值，反求其式。在實踐上乃是用多項式的**函數本質**回頭來求解其「**式**」的表現。在此且以求和公式為例，解說這種插值法的用法。

讓我們先看幾個簡單的求和公式的例子。

(i)

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1),$$

上述級數的求和公式可以用下述巧妙的方法來發現，即

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & S_n & = & 0 & + & 1 & + \cdots + & (n-1) \\
+) & S_n & = & (n-1) & + & (n-2) & + \cdots + & 0 \\
\hline
 & 2S_n & = & (n-1) & + & (n-1) & + \cdots + & (n-1) \\
 & & = & n\cdot(n-1) & & & &
\end{array}$$

因此

$$S_n = \frac{1}{2}n(n-1)。$$

(ii) 運用同樣方法也可以找出下述等差級數的求和公式：

$$\widetilde{S}_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + \big[a + (n-1)d\big] = \frac{1}{2}n\big[2a + (n-1)d\big]，$$

即以互逆方向相加 $\widetilde{S}_n + \widetilde{S}_n$，得出

$$\begin{aligned} 2\widetilde{S}_n =& \big[2a + (n-1)d\big] + \big[2a + (n-1)d\big] + \cdots + \big[2a + (n-1)d\big] \\ =& \, n \cdot \big[2a + (n-1)d\big]。\end{aligned}$$

其實，我們還可以應用已知 S_n 的公式來間接地求得上述公式

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{(n-1)} (a + id) &\overset{(分配律)}{=} n \cdot a + d \cdot \frac{1}{2}n(n-1) \\ &= \frac{1}{2}n\big[2a + (n-1)d\big]。\end{aligned}$$

(iii)

$$\sum_{i=0}^{(n-1)} i^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)。$$

據歷史記載，古代中國和古希臘的數學家都知道上述級數的求和公式，但是他們究竟是如何求得此公式的，現已無法考證了。不過，只要他們能夠從某些途徑或想法得出一個正確的「猜想公式」，再去驗證這個猜想公式的正確性其實並不是一件很困難的事情。以現今的說法，驗證工作只需要證明下述恆等式：

$$\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + n^2 \overset{?}{\equiv} \frac{1}{6}(n+1) \cdot n \cdot (2n+1)。$$

實際上，我們可以以上述恆等式為基礎用數學歸納法來證明上述求和公式。

(iv) 其實古代中國和古希臘的數學家也知道另一個類似的求和公式：

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}n(n-1) =& \frac{1}{6}n(n-1)(n-2+3) \\ =& \frac{1}{6}(n+1)n(n-1)，\end{aligned}$$

即可用歸納法證得上述求和公式的正確性。

由此可見，假若我們能夠從某些途徑找出一個正確的猜想公式，則餘下所需的驗證工作其實是相當簡單的「歸納證明」。因此，問題的要點在於怎樣去發現和寫出這個「尚待確定」的求和公式。現在，讓我們應用插值法來找出一個「有系統的」求和公式探討，作為插值法應用的一個好例子。

首先，如「韓信點兵法」所示，我們不妨先把問題放在一個適當廣度的範疇來討論：

【問題 1】 給定任意的多項式 $f(x)$，如 $1, x, x^2, x^3$，或 $\frac{1}{2}x(x-1)$，$\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$ 等等，怎樣找出求和公式 $S_f(n)$ 來計算下述級數之總和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(i) = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) = ? \tag{2.1}$$

也即要找出適當公式 $S_f(n)$，使得

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(i) = S_f(n) \tag{2.2}$$

對於所有 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 皆成立。

【分析】

(i) 不妨先假設上述求和公式 $S_f(n)$ 是 n 的多項式。則 $S_f(n)$ 滿足下述特徵性質：

$S_f(n+1) - S_f(n) = f(n)$，
$S_f(0) = 0$。（零項的總和當然應該是 0）

(ii) 反之，假若有一個多項式 $S_f(x)$ 滿足條件 $S_f(0) = 0$ 和

$$S_f(x+1) - S_f(x) = f(x)，$$

其中的 $S_f(x+1)$ 表示把 $S_f(x)$ 內所有的 x 都換成 $x+1$，則

$$S_f(i+1) - S_f(i) = f(i)， \qquad i \geq 0，$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} f(i) = \sum_{i=0}^{n-1} \Big(S_f(i+1) - S_f(i)\Big) = S_f(n) - S_f(0) = S_f(n)。$$

定理 2.1 給出任合一個 k 次多項式 $f(x)$，存在一個唯一的 $k+1$ 次多項式 $S_f(x)$，它滿足條件 $S_f(0) = 0$ 和

$$S_f(x+1) - S_f(x) = f(x)， \tag{2.3}$$

也即

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(i) = S_f(n) \tag{2.4}$$

對於所有 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 皆成立。

證明

讓我們先對 k 用歸納法來證明 $S_f(x)$ 的存在性。當 $k = 0$ 時，$f(x)$ 實質上是一個常數，

即 $f(x) \equiv c$。易知這時 $S_f(x) = cx$，也即

$$S_f(x+1) - S_f(x) = c(x+1) - cx = c = f(x)。 \tag{2.5}$$

歸納假設對所有次數不高於 k 的多項式 $f(x)$，求和公式 $S_f(x)$ 皆存在，而且其次數不高於 $(k+1)$；現在進而證明對任意給出的 $(k+1)$ 次多項式 $f(x)$，其所相應的 $S_f(x)$ 的存在性如下。令

$$\begin{aligned} f(x) &= cx^{k+1} + g(x)， \qquad \deg g(x) \le k， \\ \frac{c}{k+2}\Big((x+1)^{k+2} - x^{k+2}\Big) &= cx^{k+1} + h(x)， \end{aligned} \tag{2.6}$$

易見

$$(x+1)^{k+2} = x^{k+2} + (k+2)x^{k+1} + \text{不高於 } k \text{ 次的多項式}， \tag{2.7}$$

所以有 $\deg h(x) \le k$ 和 $\deg\,(g(x) - h(x)) \le k$。由歸納假設得知存在一個次數不高於 $(k+1)$ 的多項式 $G(x)$，使得

$$G(0) = 0 \qquad \text{和} \qquad G(x+1) - G(x) = g(x) - h(x)。 \tag{2.8}$$

令

$$S_f(x) = \frac{c}{k+2}x^{k+2} + G(x)， \tag{2.9}$$

則 $S_f(0) = 0$ 和

$$\begin{aligned} &S_f(x+1) - S_f(x) \\ =&\frac{c}{k+2}\Big((x+1)^{k+2} - x^{k+2}\Big) + \Big(G(x+1) - G(x)\Big) \\ =&cx^{k+1} + h(x) + \big(g(x) - h(x)\big) \\ =&cx^{k+1} + g(x) = f(x)， \end{aligned} \tag{2.10}$$

這樣便歸納地證明了 $S_f(x)$ 的存在性。

至於 $S_f(x)$ 的唯一性則可以由【定理 1.1】的結論和 $S_f(x)$ 的特徵性質：

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(i) = S_f(n)， \qquad n = 1, 2, 3, \cdots， \tag{2.11}$$

直接推論而得。

【註】 當求和公式的存在性和唯一性得到驗證後，插值法便提供了一種非常有效的方法來求出 $S_f(x)$ 的明確公式。

一個 k 次多項式 $f(x)$ 是可以由其 $(k+1)$ 個值 $\{f(i); 0 \le i \le k\}$ 所唯一確定的。而相應的求和公式 $S_f(x)$，由於它是 $(k+1)$ 次多項式，則需要由其 $(k+2)$ 個值所決定，即

$$\begin{aligned} &S_f(0) = 0， \\ &S_f(1) = f(0)， \\ &S_f(2) = f(0) + f(1)， \\ &\cdots\cdots \\ &S_f(k+1) = f(0) + f(1) + \cdots + f(k)。 \end{aligned}$$

因此，我們很自然地便想到可以用插值法來從上述 $(k+2)$ 個接連的和值來求出 $S_f(x)$ 的明確公式。

一系列特殊的多項式

令

$$
\begin{aligned}
&g_0(x)=1\text{，}\\
&g_1(x)=x\text{，}\\
&g_2(x)=\frac{1}{2}x(x-1)\text{，}\\
&\cdots\cdots\\
&g_k(x)=\frac{1}{k!}x(x-1)\cdots(x-k+1)\text{，}\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

上述 $g_k(x)$ 的選取是使得 $g_k(i)=0$（$0\le i\le (k-1)$）和 $g_k(k)=1$，所以 $g_k(n)$ 的前 k 個總和皆為 0（即 $S_{gk}(i)=0$，$1\le i\le k$），而第 $(k{+}1)$ 個總和是 1（即 $S_{gk}(k{+}1)=1$）。這剛好表示 $g_k(x)$ 的求和公式其實就是這個系列多項式的下一位成員，即

$$S_{gk}(x)=g_{k+1}(x)\text{。}$$

上述極為簡潔的關係式自然而然地成為我們用來尋找求和公式的有效工具（就像在餘數問題中的 $x_1,\cdots,x_k$ 一樣）。給定任意一個 ℓ 次的多項式 $f(x)$，其求和公式 $S_f(x)$ 可以用下述方法來有系統地確定之。

(i) 首先要注意 $f(x)$ 是可以唯一地寫成 $\{g_k(x);0\le k\le\ell\}$ 的常數倍之組合，也即存在系數集 $\{c_k;0\le k\le\ell\}$，使得

$$
\begin{aligned}
f(x)=&c_0g_0(x)+c_1g_1(x)+\cdots+c_kg_k(x)+\cdots+c_\ell g_\ell(x)\\
=&\sum_{k=0}^{\ell}c_kg_k(x)\text{，}
\end{aligned}
$$

上述組合一般稱之為 $\{g_k(x),0\le k\le\ell\}$ 的「線性組合」（linear combination）。

(ii) 然後，由分配律可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1}f(i)=&\sum_{i=0}^{n-1}\Big(c_0g_0(i)+c_1g_1(i)+\cdots+c_kg_k(i)+\cdots+c_\ell g_\ell(i)\Big)\\
=&c_0\sum_{i=0}^{n-1}g_0(i)+\cdots+c_k\sum_{i=0}^{n-1}g_k(i)+\cdots+c_\ell\sum_{i=0}^{n-1}g_\ell(i)\\
=&c_0g_1(n)+c_1g_2(n)+\cdots+c_kg_{k+1}(n)+\cdots+c_\ell g_{\ell+1}(n)\text{，}
\end{aligned}
$$

即

$$S_f(x)=\sum_{k=0}^{\ell}c_kg_{k+1}(x)\text{。}$$

由此可見，若要寫下這個待定的 $S_f(x)$ 的明確表達式，就只需去求得系數集 $\{c_k;0\le k\le\ell\}$。所以接著的工作就是如何有效地從 $\{f(i);0\le i\le\ell\}$ 這 $(\ell+1)$ 個值來確定系數集 $\{c_k;0\le k\le\ell\}$。

(iii) 首個系數 c_0 顯然等於 $f(0)$，因為 $g_k(0)=0$，$k>0$。為了方便描述下面一套有系統的方法來從 $\{f(i); 0\le i\le \ell\}$ 這 $(\ell+1)$ 值求得對應系數集 $\{c_k; 0\le k\le \ell\}$，我們引進下述運算符號（稱之為差分算子，difference operator）：

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)\text{，}$$

不難直接驗證 Δ 算子具下述易算好用的性質：

$$\begin{aligned}&\Delta\big(f(x)+h(x)\big)=\Delta f(x)+\Delta h(x)\text{，}\\&\Delta\big(cf(x)\big)=c\Delta\big(f(x)\big)\text{。}\end{aligned}$$

另一方面，因為 $g_k(x)$ 是 $g_{k-1}(x)$ 的求和公式，易見

$$\Delta g_k(x)=g_{k-1}(x)\text{，}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\Delta f(x)=&\Delta\Big(c_0+c_1g_1(x)+\cdots+c_\ell g_\ell(x)\Big)\\=&0+c_1g_0(x)+c_2g_1(x)+\cdots+c_\ell g_{\ell-1}(x)\text{，}\end{aligned}$$

即

$$c_1=\Delta f(0)=f(1)-f(0)\text{。}$$

再次應用 Δ 算子，我們便可以算出下一個系數 c_2。

$$\begin{aligned}&\Delta^2 f(x)=c_2g_0(x)+c_3g_1(x)+\cdots+c_\ell g_{\ell-2}(x)\text{，}\\&c_2=\Delta^2 f(0)=\Delta f(1)-\Delta f(0)\\&\qquad=\Big(f(2)-f(1)\Big)-\Big(f(1)-f(0)\Big)\\&\qquad=f(2)-2f(1)+f(0)\text{。}\end{aligned}$$

如此類推，我們不斷重複應用 Δ 算子，然後再代入 $x=0$，便可逐步從 $\{f(i); 0\le i\le \ell\}$ 求得 $\{c_k; 0\le k\le \ell\}$。

$$\begin{array}{c}(c_0=)\ \ f(0),f(1),f(2),f(3),\cdots,f(\ell-1),f(\ell)\\(c_1=)\ \ \Delta f(0),\Delta f(1),\Delta f(2),\cdots,\Delta f(\ell-1)\\(c_2=)\ \ \Delta^2 f(0),\Delta^2 f(1),\cdots,\Delta^2 f(\ell-2)\\(c_3=)\ \ \Delta^3 f(0),\cdots,\Delta^3 f(\ell-3)\\\vdots\quad\ \vdots\\(c_\ell=)\ \ \Delta^\ell f(0)\end{array}$$

（下一層的數值是由上一層相鄰的兩個數值之差所得出的。）

【例】

(i) $f(x) = x^2$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & 1 & & 4 \\ & 1 & & 3 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &f(x) = g_1(x) + 2g_2(x)\text{，} \\ &S_f(x) = g_2(x) + 2g_3(x) = \frac{1}{6}x(x-1)(2x-1)\text{；} \end{aligned}$$

(ii) $f(x) = x^3$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1 & & 8 & & 27 \\ & 1 & & 7 & & 19 & \\ & & 6 & & 12 & & \\ & & & 6 & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &f(x) = g_1(x) + 6g_2(x) + 6g_3(x)\text{，} \\ &S_f(x) = g_2(x) + 6g_3(x) + 6g_4(x) = \frac{1}{4}x^2(x-1)^2\text{；} \end{aligned}$$

(iii) $f(x) = x^4$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 1^4 & & 2^4 & & 3^4 & & 4^4 \\ & 1 & & 15 & & 65 & & 175 & \\ & & 14 & & 50 & & 110 & & \\ & & & 36 & & 60 & & & \\ & & & & 24 & & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &f(x) = g_1(x) + 14g_2(x) + 36g_3(x) + 24g_4(x)\text{，} \\ &S_f(x) = g_2(x) + 14g_3(x) + 36g_4(x) + 24g_5(x)\text{。} \end{aligned}$$

2.2 二項定理與泰勒公式

在多項式的運算中，把 $(x+y)^n$ 展開成單項之和（即 $\sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k} y^k$）的公式是有著根本的重要性。例如在上一章討論求和公式的時候，我們需要同時討論 $S_f(x)$ 在 $x = k$ 和 $x = k+1$ 時的表達式，所以尋找 $(x+1)^n$ 的展開式就是一個關鍵的步驟。二項式定理就是把上述 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k} y^k$ 中的每個系數 c_k（$0 \le k \le n$）明確地表達出來。

泰勒公式在本質上其實就是二項式定理的推廣，它也是引進多項式的微分學的一個重要起點。

直接運用分配律歸納地寫下 $(x+y)^n$ 的展開式：

$$
\begin{aligned}
&n=0: \quad (x+y)^0 = 1\text{；}\\
&n=1: \quad (x+y)^1 = x+y\text{；}\\
&n=2: \quad (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2\text{；}\\
&n=3: \quad (x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\text{；}\\
&n=4: \quad (x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4\text{；}\\
&n=5: \quad (x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5\text{。}
\end{aligned}
$$

假如把上述每個展開式中的 $x^{n-k}y^k$ 的系數分離出來，我們發現它們之間可以自然而然地排列成下述三角陣式，並且滿足一種簡單的構造規律。這個三角陣式我們稱之為「賈獻三角」或「楊輝三角」，而在西方則稱之為「帕斯卡三角」（Pascal triangle）。

$$
\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
\cdots\cdots
\end{array}
\tag{2.12}
$$

例如在 $n=3$ 時，其相應的系數集就是 $\{1,3,3,1\}$，也即

$$(x+y)^3 = 1x^3+3x^2y+3xy^2+1y^3\text{。} \tag{2.13}$$

若將 (2.13) 式乘上 $(x+y)$，則用分配律可得

$$(x+y)^4 = x\cdot(1x^3+3x^2y+3xy^2+1y^3)+y\cdot(1x^3+3x^2y+3xy^2+1y^3) \tag{2.14}$$

也即

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
(x+y)^4 & = & 1x^4 & + & 3x^3y & + & 3x^2y^2 & + & 1xy^3 & + & (0y^4)\\
 & & (0x^4) & + & 1x^3y & + & 3x^2y^2 & + & 3xy^3 & + & 1y^4\\
\hline
 & & 1x^4 & + & 4x^3y & + & 6x^2y^2 & + & 4xy^3 & + & 1y^4
\end{array}
$$

由此可見，第五行 $(n=4)$ 中的每個系數其實就是上一行 $(n=3)$ 中的相鄰系數之和（在首、尾補上兩個零）。一般地，令

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k}y^k\text{，} \tag{2.15}$$

則類似地可得

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} =&(x+y)(x+y)^n = x\cdot(x+y)^n + y\cdot(x+y)^n\\
=&\sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k}y^{k+1}\\
=&\sum_{k=0}^{n+1}\left(C_k^n + C_{k-1}^n\right)x^{n+1-k}y^k \qquad \text{（補上}C_{n+1}^n = 0 = C_{-1}^n\text{）。}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

另一方面，由 C_k^n 的定義式 (2.15) 得

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} x^{n+1-k} y^k \text{，} \tag{2.17}$$

由此可得

$$C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n \qquad (\Longleftrightarrow C_k^{n+1} - C_k^n = C_{k-1}^n)\text{。}$$

用這個歸納遞推公式（inductive recurrence relation）來表達那些系數與系數之間的關系，也即可以用 $(x+y)^n$ 展開後的系數來表達 $(x+y)^{n+1}$ 展開後的系數。這也就是描述上述三角陣式的構造規律。

現在讓我們從另一角度來看看上述遞推公式的意義。先把某一個 $k \geq 0$ 固定不動，然後將 C_k^n 看成一個函數 $f_k(x)$ 在 $x = n$ 時的取值。易見

$$f_0(x) \equiv 1\text{，} \qquad f_1(x) = x \qquad \text{（因為 } C_k^n = n\text{），} \tag{2.18}$$

則前述的遞推公式可以重新寫成

$$f_k(n+1) - f_k(n) = f_{k-1}(n) \qquad \text{（即 } C_k^{n+1} - C_k^n = C_{k-1}^n\text{）。} \tag{2.19}$$

顯然上述的討論說明了

$$\Delta f_k(x) = f_{k-1}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f_k(x) = S_{f_{k-1}}(x)\text{，} \tag{2.20}$$

也即上述所定義的一系列函數 $\{f_k(x),\ k = 0, 1, 2, \cdots\}$ 剛好就是在前一章尋找求和公式時引入的特殊函數集 $\{g_k(x),\ k = 0, 1, 2, \cdots\}$。

定理 2.2　二項定理（The Binomial Theorem）

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k \text{，} \tag{2.21}$$

其中，二項式系數（binomial coefficients）C_k^n 的明確表達式是

$$C_k^n = g_k(n) = \frac{1}{k!} n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (0! = 1)\text{。} \tag{2.22}$$

推論 1　$C_k^n = C_{n-k}^n$。

推論 2

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^n = (1+1)^n = 2^n\text{，} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^n C_k^n = (1-1)^n = 0\text{。}$$

2.3 泰勒公式與多項式的局部展開式

設 $f(x)$ 為一個給定的多項式，a 為一個給定點。若我們把 x 局限於 a 的鄰域時，$f(x)$ 在這個範圍的性質便稱之為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的鄰域的「局部性質」（local properties）。當我們研究 $f(x)$ 的局部性質時，宜以 $x=a+t$ 代入然後以二項式定理把 $f(x)=f(a+t)$ 展開為 t 的升冪表達式，其中 $|t|$ 是足夠小的，因而展開後的各項的絕對值乃是隨著的次數的升高而大幅縮小，因此它們的局部影響力顯然是高次項要遠小於低次項，可以說是「階段分明，一目了然」。總之，這是一種常用、好用的辦法。例如：

(i) $f(x)=x^3$：

$$f(a+t)=a^3+3a^2t+3at^2+t^3\text{；}$$

(ii) $f(x)=x^3-2x^2+5x+1$：

$$f(a+t)=(a^3-2a^2+5a+1)+(3a^2-4a+5)t+(3a-2)t^2+t^3\text{；}$$

(iii) $f(x)=cx^n$：

$$f(a+t)=ca^n+nca^{n-1}t+\frac{n(n-1)}{2}ca^{n-2}t^2+\cdots+ct^n\text{。} \tag{2.23}$$

由上述「局部展開」（local expansion）的例子可見，引進下述對於多項式的形式運算（formal operation）將會有很好的用途。

【定義】 設 (x) 為任意給定的多項式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\text{，}$$

定義算子 D 為把 $f(x)$ 變成下述多項式 $Df(x)$ 的形式運算：

$$Df(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}ia_ix^{i-1}\text{。} \tag{2.24}$$

再者，定義 D^k 為上述形式運算 D 的重複 k 次者。例如：

$$\begin{aligned}D^2f(x)&=2a_2+6a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}\\&=\sum_{i=2}^{n}i(i-1)a_ix^{i-2}\text{，}\\D^k(x^n)&=n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}=k!C_k^nx^{n-k}\text{。}\end{aligned}$$

易證上述所定義的算子 D 滿足下述簡單好用的性質，即

$$D\big(c_1f_1(x)+c_2f_2(x)\big)=c_1Df_1(x)+c_2Df_2(x)\text{。} \tag{2.25}$$

（事實上，D 本身就可以用上述性質和基本定義 $D(x^n)=nx^{n-1}$ 所唯一確定的。）

運用算子符號 D，我們可以把 (2.23) 式中的 $f(x)=cx^n$ 局部展開式重新寫成下述非常簡潔的形式，即

$$\begin{aligned} f(a+t) =& f(a)+Df(a)t+\frac{D^2f(a)}{2!}t^2+\cdots+\frac{D^kf(a)}{k!}t^k+\cdots+\frac{D^nf(a)}{n!}t^n \\ =& \sum_{k=0}^{n}\frac{D^kf(a)}{k!}t^k \text{。} \end{aligned}$$

在 $f(x)=x^n$ 的特殊情形，上述公式其實就是二項式定理的另一寫法。也許大家會問，這豈非僅是舊酒裝新瓶的做法？但其實不然！上述公式將帶領著我們邁向一個嶄新的領域，它開啓了進入微分學範疇的大門（詳見第三章）。

定理 2.3　多項式的泰勒公式（Taylor's formula for polynomials）

設 $f(x)$ 為一個 n 次多項式，則

$$\begin{aligned} f(a+t) =& f(a)+Df(a)t+\frac{D^2f(a)}{2!}t^2+\cdots+\frac{D^kf(a)}{k!}t^k+\cdots+\frac{D^nf(a)}{n!}t^n \\ =& \sum_{k=0}^{n}\frac{D^kf(a)}{k!}t^k \text{。} \end{aligned}$$

【註】　上述局部展開式在 $k=n$ 時會自然終止，因為對於所有 $k>n=\deg f(x)$ 來說，$D^kf(x)\equiv 0$。

證明

我們採用歸納法按多項式次數 n 作歸納證明。$\deg f(x)=0$ 時的情況是顯然易見的，現在歸納假設泰勒公式對所有次數不高於 $(n-1)$ 的多項式普遍成立。令 $f(x)$ 為任意一個 n 次的多項式，把 $f(x)$ 重新寫成：

$$f(x)=cx^n+f_2(x)=f_1(x)+f_2(x), \qquad \deg f_2(x)\le n-1\text{，} \tag{2.26}$$

則由歸納假設可得

$$f_2(a+t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^kf_2(a)t^k \qquad (D^nf_2(a)=0)\text{。} \tag{2.27}$$

由前述 cx^n 的展開式例子（即 (2.23) 式），又有

$$f_1(a+t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^kf_1(a)t^k\text{，} \tag{2.28}$$

由此可得

$$\begin{aligned} f(a+t) =& f_1(a+t)+f_2(a+t) \\ =& \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^k f_1(a)t^k+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^k f_2(a)t^k \\ =& \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(D^k f_1(a)+D^k f_2(a)\right)t^k \\ =& \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^k f(a)t^k \qquad \text{（即 (2.25) 式）。} \end{aligned}$$

推論 1 當 $f(x)$ 被除以 $(x-a)^k$ 時，其餘式為：

$$f(a)+Df(a)(x-a)+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}D^{k-1}f(a)(x-a)^{k-1}\text{。}$$

證明

$$\begin{aligned} f(x) =& f\big(a+(x-a)\big)=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}D^j f(a)(x-a)^j \\ =& \left(\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j!}D^j f(a)(x-a)^{(j-k)}\right)\cdot(x-a)^k+\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}f(a)(x-a)^j\right)\text{。} \end{aligned}$$

推論 2 $f(x)$ 可被 $(x-a)^2$ 整除的充要條件為 $f(a)=0$ 且 $Df(a)=0$，即 $x=a$ 是 $f(x)$ 和 $Df(x)$ 的公共根，也即 $(x-a)$ 是 $f(x)$ 和 $Df(x)$ 的一個公因式。

推論 3 $D(f(x)\cdot g(x))=(D(x))\cdot g(x)+f(x)\cdot Dg(x)$。

證明

只需證明對任意 a 恆有

$$D(f\cdot g)(a)=Df(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot Dg(a)\text{。} \tag{2.29}$$

由推論 1 知

$$\begin{aligned} f(x) &= q_1(x)\cdot(x-a)^2+\big(f(a)+Df(a)(x-a)\big)\text{，} \\ g(x) &= q_2(x)\cdot(x-a)^2+\big(g(a)+Dg(a)(x-a)\big)\text{，} \\ f(x)\cdot g(x) &= q_3\cdot(x-a)^2+\big(f(a)\cdot g(a)+D(f\cdot g)(a)(x-a)\big)\text{。} \end{aligned}$$

把上述的第一式和第二式相乘後可得

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) =& \Big(q_1(x)\cdot g(x)+q_2(x)\cdot\big(f(a)+Df(a)(x-a)\big)+Df(a)\cdot Dg(a)\Big)\cdot(x-a)^2 \\ &+\Big(f(a)\cdot g(a)+\big(Df(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot Dg(a)\big)(x-a)\Big)\text{。} \end{aligned}$$

現在，把上述兩種 $f(x) \cdot g(x)$ 的展開式中 $(x-a)$ 的項作一比較，即得所求證的等式 $D(f \cdot g)(a) = Df(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot Dg(a)$，也即

$$D(f \cdot g) = Df \cdot g + f \cdot Dg。$$

Chapter 3

由代數邁向微積分：多項式的微積分

概括地來說，一個函數 $y = f(x)$ 描述的是一個變量的值如何隨著另一個變量的改變而變化的方式。由此可見，函數的「變化速度」有著根本的重要性。另一方面，從宏觀的角度來說，函數的整體效應也有著根本的重要性，它記錄了這個函數在某一個範圍內所作的影響的「總和」。

在這一章中，我們將會對上述兩種具有根本重要性的函數性質——「變率」與「總和」做一次探本究源的工作。在多項式函數的範疇中，兩者則分別對應於上兩章所討論的泰勒公式和求和公式。

3.1 變率與微分

首先讓我們看看線性函數的情形。設 $y = Ax + B$，當 x 由 x_1 改變至 x_2 時，則相應會有 y 由 $y_1 = Ax_1 + B$ 改變至 $y_2 = Ax_2 + B$。因此 y 的改變值與 x 的改變值之間的比率為

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{A(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = A。 \tag{3.1}$$

所以 $y = Ax + B$ 的「變率」就自然而然地定義為上述常數 A。反之，若某一個函數 $y = f(x)$ 在每一點的「變率」恆等於常數 A，則易見 $y = Ax + f(0)$。

但對於其他的多項式函數而言（即使像 $y = x^2$ 這樣簡單的函數），上面所計算的「x, y 改變值之比率」會隨著 (x_1, x_2) 的位置不同而改變，所以這類函數的「變率」其實還是一個「尚待定義」的概念！無論如何，現在讓我們先來重新剖析一下「變率」這個概念的直觀內含。

令 $y = f_1(x)$ 和 $y = f_2(x)$ 為兩個函數，它們在 $x = a$ 點的值相同，即 $f_1(a) = f_2(a)$。設

$$\begin{aligned} &\text{當 } a - \delta < x < a， && f_1(x) < f_2(x)； \\ &\text{當 } a < x < a + \delta， && f_1(x) > f_2(x)。 \end{aligned}$$

也即在 $x = a$ 點時 $f_1(x)$「從後趕上」$f_2(x)$ 而且超越之。在這個情況下，$f_1(x)$ 在 $x = a$ 的「變率」顯然是不可能小於 $f_2(x)$ 在 $x = a$ 的「變率」的。假若不然，則我們所討論的東西和「變率」的直觀意義不符；換句話說，若所討論的概念並不滿足上述比較條件，則它絕不會是我們想要研究的「變率」！

請讀者想想下述一個實際例子：設有甲、乙兩人在一條公路上作自行車競賽，分別以 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 表示甲、乙在 x 秒後與起點的距離。設甲在 $x = a$ 時從後趕上乙而且超

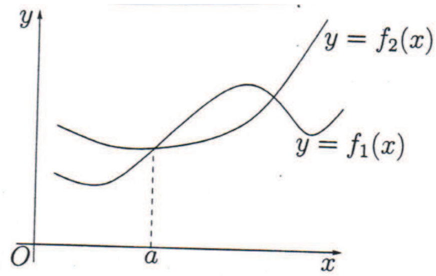

Figure 3.1:

越他，也即在 x 略小於 a 時，甲在乙之後；但是在 x 略大於 a 時，則甲在乙之前。則甲在 $x = a$ 時的「速率」顯然不能小於乙的「速率」，要不然，則甲是不可能在 $x = a$ 時達成後來居上的。

把上述直觀上十分明顯的事實，改用函數框架敘述之，即為下述刻劃變率的直觀內容的比較原則。

變率的比較原則（Comparison principle of rate of change）

設有兩個函數 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 滿足 $f_1(a) = f_2(a)$，而且在 $x = a$ 的鄰域具有下述大小關系，即對於一個足夠小的 $\delta > 0$，

$$\begin{cases} \text{當 } a-\delta < x < a\text{，} & f_1(x) < f_2(x)\text{；} \\ \text{當 } a < x < a+\delta\text{，} & f_1(x) > f_2(x)\text{。} \end{cases} \tag{3.2}$$

則 $f_1(x)$ 在 $x = a$ 的變率不小於 $f_2(x)$ 在 $x = a$ 的變率。

根據上述比較原則和已知的線性函數變率，我們將會證明多項式函數 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 的變率就是 $Df(a)$。

【例 1】

讓我們先以 $f(x) = cx^3$ 為例，用上述比較原則去研討它在 $x = a$ 點的變率應該是什麼。因為一次函數的變率已知，我們可以把 $f(x)$ 和 $g(x) = ca^3 + m(x-a)$（注意：$f(a) = g(a)$）來比較。令 $x = a + \delta$，則有

$$\begin{aligned} f(x) &= c(a+\delta)^3 = ca^3 + 3ca^2\delta + 3ca\delta^2 + c\delta^3\text{，} \\ g(x) &= ca^3 + m\delta\text{，} \\ f(x) - g(x) &= (3ca^2 - m)\delta + \delta^2(3ca + c\delta)\text{。} \end{aligned}$$

由此不難看到，當 $(3ca^2 - m) \neq 0$ 時，只要把 $|\delta|$ 取得足夠小，則 $f(x) - g(x)$ 與 $(3ca^2 - m)\delta$ 同號。所以由比較原則 (3.2) 即有

$$\begin{aligned} m > 3ca^2 &\implies f(x) \text{ 在 } x = a \text{ 點的變率} \le m\text{，} \\ m < 3ca^2 &\implies f(x) \text{ 在 } x = a \text{ 點的變率} \ge m\text{。} \end{aligned}$$

所以「$f(x)$ 在 $x = a$ 點的變率」必須小於任何大於 $3ca^2$ 的 m，又必須大於任何小於 $3ca^2$ 的 m，所以唯有把它定義 $3ca^2$ 為才合乎上述比較原則。

定理 3.1 一個多項式函數 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 的變率的唯一合理定義是 $Df(a)$。

證明

其實，只要把【例 1】的方法的直接推廣，就可以用來證明【定理 3.1】。給定一個實數 m，令

$$g(x) = f(a) + m(x - a)\text{。} \tag{3.3}$$

另一方面，由 $f(x)$ 的泰勒展開式可得

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x - a) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a) f(x - a)^k\text{。} \tag{3.4}$$

由此可見，令 $\delta = x - a$，則有

$$f(x) - g(x) = \big(Df(a) - m\big)\delta + \delta^2 \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a) \delta^{k-2} \right)\text{。} \tag{3.5}$$

同理，當 $Df(a) - m \neq 0$ 時，只要把 $|\delta|$ 取得足夠小，則 $f(x) - g(x)$ 與 $(Df(a) - m)\delta$ 同號。所以由比較原則 (3.2) 即有

$$\begin{aligned} m > Df(a) \quad &\Longrightarrow \quad f(x) \text{ 在 } x = a \text{ 點的變率} \leq m\text{，} \\ m < Df(a) \quad &\Longrightarrow \quad f(x) \text{ 在 } x = a \text{ 點的變率} \geq m\text{。} \end{aligned}$$

所以「$f(x)$ 在 $x = a$ 點的變率」的唯一合理定義就是 $Df(a)$。

【註】 在上一章中，運算符號 D 只是形式上的運算，我們引進它來簡潔地把二項定理推廣成泰勒公式。而上述【定理 3.1】則說明了 $Df(x)$ 在分析學上的意義——它剛好就是記錄著 $f(x)$ 在每一點上變率。這種變率的概念其實可以推廣到更廣泛的函數類，記錄著一個一般函數的變率之函數我們稱為該函數的**導函數**（derivative function），而求出導函數的運算過程稱為**微分**（differentiation）。由此可見，在上一章形式代數運算其實就是「多項式的微分」。至於如何把泰勒公式推廣成能應用於更為廣泛的函數類型，這正是整個微分學的基本骨幹。

插值問題推廣

在第一章中所討論的插值問題，要求待求公式必須在某些特定地方取某些特定值。但在實際的應用問題上，有時候還需要求待公式的圖像在該點有特定變率、特定曲率等等。例如：設有一個 4 次多項式 $f(x)$ ，它在 $x = \pm$ 和 $x = 2$ 三點的值已給定，而且其變率在 $x = \pm 1$ 時也給定，問能否唯一地確定 $f(x)$？換句話說，能否由下述五個條件唯一地確定一個 4 次多項式 $f(x)$？

$$f(-1), \quad Df(-1), \quad f(1), \quad Df(1), \quad f(2)\text{。}$$

下面我們以上述數值分別為 $9, -6, 1, 6, 27$ 為例說明其解決。

首先，在 $x=-1,1,2$ 分別取值 9, 1, 27 的 2 次多項式 $g(x)$，可以用插值公式唯一確定，即

$$g(x)=10x^2-4x-5。$$

留意 $f(x)-g(x)$ 在 $x=-1,1,2$ 這三點皆為 0，也即 $f(x)-g(x)$ 必定具有因式 $(x+1)(x-1)(x-2)$。由於 $f(x)-g(x)$ 是 4 次多項式，因此

$$f(x)-g(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(ax+b)，$$

其中 a,b 為兩個待定系數，即

$$f(x)=(ax+b)(x+1)(x-1)(x-2)+10x^2-4x-5。$$

對於上述 $f(x)$ 求導，即有

$$Df(x)=(ax+b)(x-1)(x-2)+(ax+b)(x+1)(x-2)+20x-4+\cdots$$

代入條件式 $Df(-1)=-6$，$Df(1)=6$，得

$$\begin{aligned}-6=Df(-1)&=(-a+b)(-2)(-3)+0-20-4+0\\ &\Rightarrow\quad -a+b=3，\\ 6=Df(x)&=0+(a+b)(2)(-1)+20+4+0\\ &\Rightarrow\quad a+b=5。\end{aligned}$$

解得 $a=1,b=4$。所以

$$f(x)=(x+4)(x^2-1)(x-2)+g(x)=x^4+2x^3+x^2-6x+3。$$

【習題】

(1) 試求出藏於半徑為 r 的球體內的圓柱體之最大體積。

(2) 試求出藏於半徑為 r 的球體內的圓錐體之最大體積。

(3) 試找出一個不高於 5 次的多項式 $f(x)$，它滿足下述條件：

$$\begin{aligned}&f(-1)=1；\\ &f(0)=1， \qquad Df(0)=-1， \qquad D^2f(0)=8；\\ &f(1)=5， \qquad Df(1)=14。\end{aligned}$$

3.2 總和與積分

我們首先描述一個在歷史具有重要意義的例子，它應用求和公式解決了一個有基本重要性的幾何問題。

假如我們用一個圓錐形的杯裝水倒進一個同底同高的圓柱形的杯時，會發現需要三滿杯圓錐形杯的水才可注滿一個圓柱形杯。相信在古時從類似的實驗也自然地引導古代中國和古希臘的幾何學家發現了圓錐體的體積公式，即圓錐體體積為同底同高的圓柱體體積的三分之一。它是三角形面積公式的「高一維」推廣，因為三角形面積就是同底同

高的平行四邊形的面積之一半。在二維的情況我們很容易就可以把一個平行四邊形切割成兩個全等的三角形，但是在三維的情況我們並沒有這種簡單的切割方法！相信有很多古希臘的幾何學家曾努力嘗試尋找類似的切割重組方法求證錐體的體積公式，但所有嘗試終歸失敗，直至最後由 Eudoxus 開創了一套嶄新的方法，錐體體積公式才能成功得證。這其實是最早的一個具有基本重要性的積分，也是現代積分學之源起。

錐體體積公式的 Eudoxus 證明

如圖 3.2 所示，一個底面積為 A、高度為 h 的錐體可以用平行於底面的平面切割成 n 塊厚度相等的簿片：

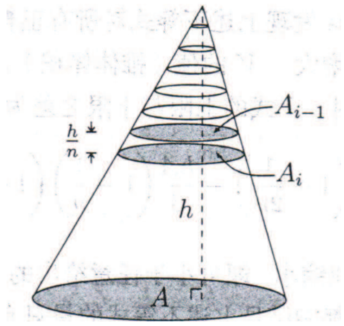

Figure 3.2:

由頂層向下數的第 i 塊薄片，其底面積為 A_i，頂面積為 A_{i-1}。由相似形定理，古希臘的幾何學家已知

$$A_i \ : \ A = \left(\frac{i}{h}h \ : \ h\right)^2, \qquad 即\ A_i = \frac{i^2}{n^2}A。 \tag{3.6}$$

由此易知其第 i 塊薄片之體積是介乎於 $\frac{h}{n} \cdot A_{i-1}$ 和 $\frac{h}{n} \cdot A_i$ 兩者之間，即

$$\frac{h}{n}A_{i-1} = \frac{(i-1)^2}{n^3}hA < V_i < \frac{i^2}{n^3}hA, \qquad 1 \leq i \leq n。 \tag{3.7}$$

把上述的不等式整合起來，便得出

$$\frac{hA}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 < \sum_{i=1}^{n}V_i = V < \frac{hA}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2。 \tag{3.8}$$

接著 Eudoxus 便應用已知的 $\sum i^2$ 求和公式把上式重寫成

$$\frac{hA}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) < V < \frac{hA}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)。 \tag{3.9}$$

至此，Eudoxus 發現上述不等式對所有正整數 n 都成立，但無論 n 如何增大，V 的值（錐體體積）是不變的！而當 n 無限地增大時，上式的上限與下限之差為

$$\frac{hA}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{hA}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) = \frac{hA}{n}。 \tag{3.10}$$

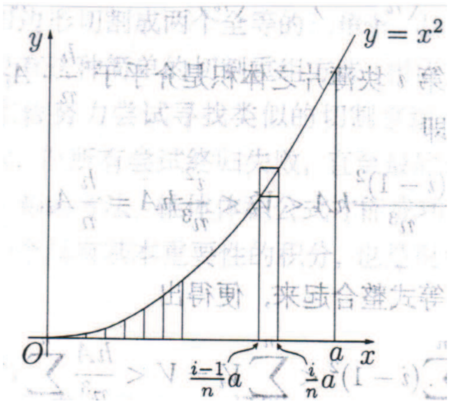

Figure 3.3:

這個量會無限地縮小，即可小於任意給出的正實數。由此可見，對所有 n 都能滿足上述不等式的量 $(hA)/3$，因此

$$V = \frac{1}{3}hA\text{。} \tag{3.11}$$

隨後，古希臘的幾何學家也用同樣的方法來求曲線 $y = x^2$ 底下的面積。

如圖 3.3 所示，圖中被曲線 $y = x^2$、直線 $x = a$ 和 x 軸所包圍的區域可被切割成 n 條寬度均為 $\frac{1}{n}a$ 的窄條。由左數起第 i 條窄條的面積顯然小於其外包矩形之面積，但大於其內含矩形之面積，即

$$\frac{a}{n}\left(\frac{i-1}{n}a\right)^2 = \frac{a^3}{n^3}(i-1)^2 < A_i < \frac{a^3}{n^3}i^2 = \frac{a}{n}\left(\frac{i}{n}a\right)\text{，} \qquad 1 \le i \le n\text{。} \tag{3.12}$$

再把上述 n 個不等式整合起來，即得

$$\frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 < \sum_{i=1}^{n}A_i = A < \frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2\text{。} \tag{3.13}$$

因此，運用同一求和公式可得

$$\frac{a^3}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) < A < \frac{a^3}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\text{。} \tag{3.14}$$

再以同樣的論證，即得能滿足所有以上不等式 A 的必定是 $a^3/3$，這樣就證明了

$$A = \frac{a^3}{3}\text{。} \tag{3.15}$$

顯然這個方法是可以直接推廣到求曲線 $y = x^k$、直線 $x = a$ 和 x 軸所包圍的區域之面積，其值為 $a^{k+1}/(k+1)$。

證明

如圖 3.4 所示，由左邊數起第 i 條窄條的面積 A_i 滿足

$$\frac{a}{n}\left(\frac{i-1}{n}a\right)^k = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}(i-1)^k < A_i < \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}\left(\frac{i}{n}a\right)^k\text{，} \qquad 1 \le i \le n\text{。} \tag{3.16}$$

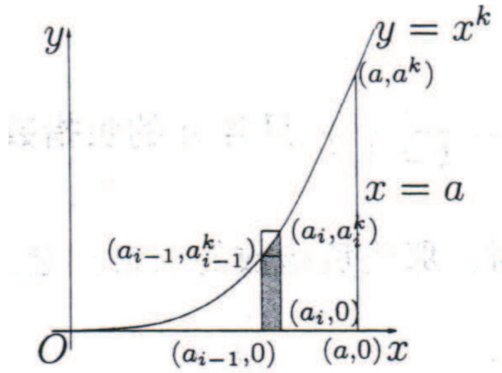

Figure 3.4:

把上述不等式整合起來，得

$$\frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^k < \sum_{i=1}^{n} A_i = A < \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n} i^k \text{。} \tag{3.17}$$

現在，我們需要運用第一章的求和公式來得上述兩個總和，即 $\sum_{i=1}^{n}(i-1)^k$ 和 $\sum_{i=1}^{n} i^k$，令

$$x^k = c_k g_k(x) + c_{k-1} g_{k-1}(x) + \cdots \text{，} \tag{3.18}$$

比較的系數即可得出，因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} i^k =&(k!)\cdot g_{k+1}(n) + c_{k-1} g_k(n) + \cdots \\ =&\frac{1}{k+1} n^{k+1} + \text{ 至多是 } n \text{ 的 } k \text{ 次的項，}\end{aligned} \tag{3.19}$$

所以

$$\frac{1}{n^{k+1}}\sum_{i=0}^{n-1} i^k = \frac{1}{k+1} + \text{ 只含 } n \text{ 的負指數的項。} \tag{3.20}$$

當 n 無限增大時，那些負指數的項自然會無限地縮小，由此可得

$$A = \frac{a^{k+1}}{k+1} \text{。} \tag{3.21}$$

用現今的積分記號，上式可寫成下述基本的多項式函數積分公式：

$$\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1} \text{。} \tag{3.22}$$