基礎數學系列選講，第二卷：幾何學的源起與演變（之一）

項武義

May 31, 2011

Contents

引言

幾何學起源於我們對於生活於其中的空間（Space）的本質的認知。而視覺（Vision）則是人類對於空間直觀的天賦本能。歸根究底，人類生存的大氣層是高度透明陽光普照的環境，優良的視覺顯然是大有利於「物競天擇」的本能。由此可見，經由億萬年進化歷程而達成的最高等動物之人類，自然而然具有極佳的視覺和空間想象能力，實非偶然。再者，因為我們有一雙眼睛，所以對於鄰近的視覺具有相當可靠的遠近立體感。但是我們的視網膜基本只是二維的，它對於二維的圖象之觀察是完整而且清晰的，但是對於三維的事物的觀察，本質上乃是一種不完整的投影，這也就是平面幾何要遠比立體幾何易於充分掌握其精要的客觀因素。有鑒於此，先行研討平面幾何，然後再進而研究立體幾何乃是幾何學演變的自然途徑。大體上來說，幾何學的進化歷程是由定性研究進而定量研究，由平面到立體，由實驗對推理，逐步、逐階地把與生俱來的視覺與空間想像能力精煉提升為對於空間本質的洞察力，全面掌握其精要和各種各樣幾何問題的深入理解。

我們將在第一講討論**定性平面幾何**，以**疊合**（亦即全等形）與**對稱性**為核心議題。大致上這也就是希臘幾何在其啓蒙階段的研究成果，但是當年沒有能夠發現關於三角形內角和的下述兩個定理，因而導致在「平行公設」（亦稱為第五公設）的困惑達兩千年，即

其一：任給三角形的內角和恆小於或等於一個平角；

其二：若有一個三角形的內角和等於一個平角，則所有三角形都恆等於一個平角。

如今回顧反思，假若當年古希臘幾何學家業已發現上述兩個定理，則在他們進而研討**定量平面幾何**時，就面臨下述兩種幾何的重要抉擇，即

其一：三角形內角和恆等於平角者，和

其二：三角形內角和恆小於平角者。

〔以現代的後見之明來看，亦即滿足平行公設的歐氏幾何學和不滿足平行公理的非歐幾何學之間的**選項**（Choices）〕而且稍加分析，就不難認識到滿足平行公理的定量幾何公式要遠比另一選項簡單許多。其實，這也就是當年希臘幾何學在進入定量研討之前，引入平行公設的基本原因。

在第二講中，我們將從中、西定量平面幾何的比較分析講起，從而剖析平面幾何由定性邁向定量的進程、關鍵和轉折。

長話短說，古希臘幾何學在定量平面幾何的基礎理論上遭遇到重大挫折（參看第二講：不可公度量之發現）和嚴峻的挑戰，但是也正由於這種挑戰的克服才使得希臘幾何學脱胎換骨，成就輝煌 Eudoxus 的定量幾何基礎論，乃是理性文明的第一個偉大里程碑，這也就是本卷第三講的核心議題。

Chapter 1

定性平面幾何：疊合、對稱性的簡樸推論

古希臘文明是在繼承了古埃及與巴比倫文明的基礎上更上層樓，特別是在幾何學與天文學上成就輝煌。有鑒於天文學上的量天對於定量幾何極度精準的要求，古希臘幾何學家們認識到建立嚴格的定量幾何基礎論的必要性，而此究自然得從定性平面幾何基礎論開始，這也就是在希臘推論幾何的啓蒙階段，如 Thales 等所研討者，以疊合、對稱性為主題。我們在此將作一次概述其要的重訪，並補充當年「失之交臂」的兩個重要定理。

1.1 三角形的全等條件；等腰三角形與平面的對稱性

從三角形的疊合性（Congruence）來看，S.A.S. 和 A.S.A. 這兩疊合條件是直觀明顯而且相互等價的，但是 S.S.S. 就非直觀顯然，而有必要加以論證。再者，三角形的疊合條件其實乃是平面對於任給直線的**反射（亦即軸）對稱性**的反映和某種具體表現，它們在本質上是邏輯等價的。有鑒於在三角形之中，等腰三角形就是那種具有**軸對稱性**的特殊三角形，可以說它乃是平面對稱性「小而精」載體。由此可見，下述等腰三角的五種特徵性質的邏輯等價性，乃是論證平面對稱性的各種各樣推論的主要工具，是定性平面幾何的基本引理（Fundamental Lemma）。

<u>等腰三角形的特徵性質</u>（如圖 1.1）

(i) $\overline{AC} = \overline{AB}$（等腰之定義）；

(ii) $\angle A = \angle B$；

(iii) $\angle C$（頂角）的平分線垂直底邊 $\overline{AB}$；

(iv) 中線 $\overline{CM}$ 垂直底邊；

(v) 垂線 $\overline{CM}$ 平分頂角；

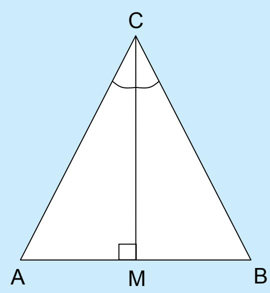


Figure 1.1:

定理 1.1 （S.S.S.）

若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三邊對應等長，則 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$。

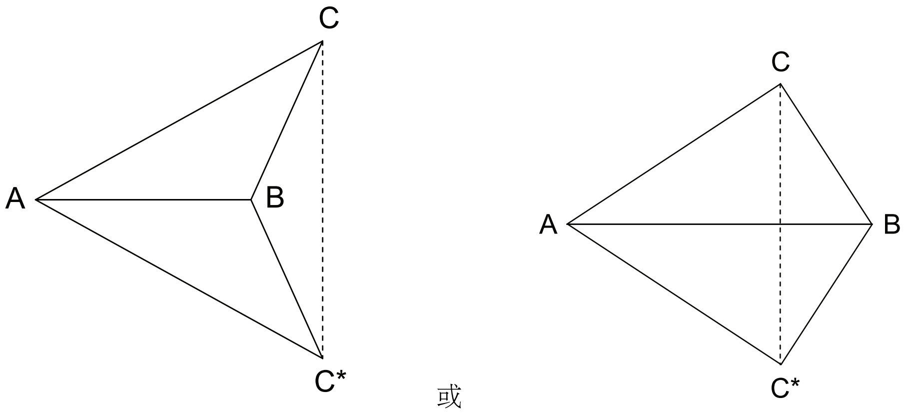


Figure 1.2:

證明

如圖 1.2 所示，我們可以在 $\overline{AB}$ 的另一側作 $\triangle ABC* \cong \triangle A'B'C'$，連結 $\overline{CC}*$。由所作 $\triangle ACC*$ 和 $\triangle BCC*$ 皆為等腰。

由上述 (i)⇒(ii)，即得

$$\begin{aligned} & \angle ACC* = \angle AC*C, \qquad \angle BCC* = \angle BC*C, \\ \Longrightarrow \quad & \angle ACB = \angle AC*B \\ \Longrightarrow \quad & \triangle\ ABC \cong \triangle ABC* \cong \triangle A'B'C'. \end{aligned}$$

【註】 上述定理乃是很多基本軌尺作圖的理論根據，相傳 (i) ⇔(ii) 為 Thales 所證是推理幾何之首證。很可能他當年就是為了要證明 S.S.S. 定理而想到先得證明 (i)⇒(ii) 這個基本引理（Fundamental Lemma）。

定理 1.2 沒有相異直線 ℓ_1, ℓ_2 分別和第三條直線 ℓ 相交，若內錯角相等（如圖 1.3 所示，$\angle 1 = \angle 2$），則 $\ell_1 \cap \ell_2 = \phi$。

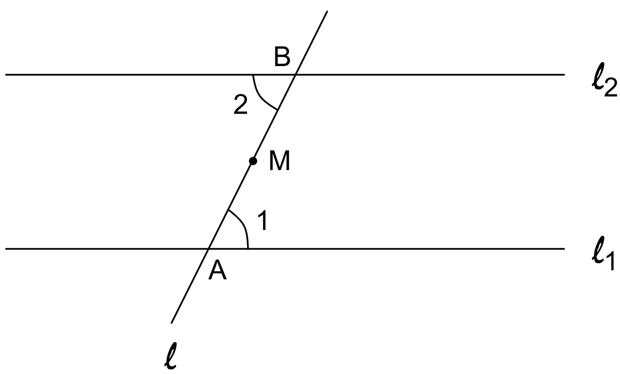


Figure 1.3:

證明

令 M 為交點 A, B 的連結線段 $\overline{AB}$ 的中點，易見圖 1.3 所示者對於 M 成**心對稱**，所以 $\ell_1 \cap \ell_2 = \phi$（不相交）。假若 ℓ_1, ℓ_2 相交一點 P，則 ℓ_1, ℓ_2 也必然相交於 P 對於 M 的心對稱點 P'，$\Rightarrow \ell_1 = \ell_2 = PP'$ 和所設 $\ell_1 \neq \ell_2$ 矛盾。

推論 1 三角形的外角大於其任一內對角（如圖 1.4 所示）β 大於 $\angle A$（和 $\angle C$）。

證明

過 B 點作 ℓ_2 使得

$$\angle 2 = \angle A，$$

則

$$\ell_2 \cap AC = \phi。$$

所以
$\beta > \angle 2 = \angle A$。

假若不然，則 ℓ_2 比然和 ℓ_1 相交。

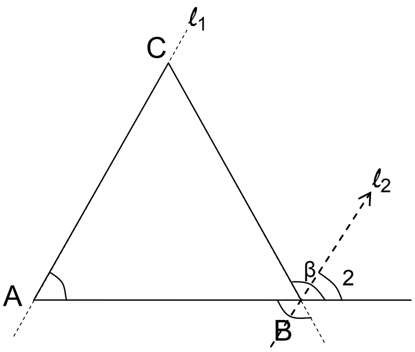


Figure 1.4:

推論 2 大邊對大角；大角對大邊。

證明

先證大邊對大角：
設 $\overline{AC} > \overline{BC}$，在 $\overline{AC}$ 上取 D 點，使得

$$\overline{DC} = \overline{BC}。$$

由所作

$$\angle ABC > \angle 1 = \angle 2 > \angle BAC。$$

（大角對大邊的證明留作習題）

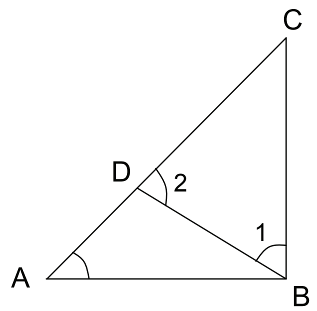


Figure 1.5:

推論 3 三角形的兩邊之和大於第三邊。

推論 4 從直線 ℓ 之外一點 P，到線上各點之距離以垂線最短（不用勾股定理，推論 1、2 的推論）。

定理 1.3 三角形的內角和不大於 π（即 $\leq \pi$）。

證明

我們將用反證法，即設存在有一個 $\triangle ABC$，

$$\angle A+\angle B+\angle C=\pi+\epsilon，\qquad \epsilon>0，$$

然後僅僅用疊合公理，連結與分隔得矛盾。

設 $\angle A$ 是三個內角中的最小者，如圖 1.6 所示，M 是其對邊之中點，連結 AM，延長一倍而得 A^*。由所作，

$$\triangle MBA^*\cong\triangle MCA\quad(S.A.S.)，$$

所以 $\triangle ABA^*$ 的三內角和也等於 $\pi+\epsilon$，而且有

$$\angle 1+\angle A^*=\angle A，$$

由此可見 $\angle ABA^*$ 中的最小內角至多只有 $\angle A$ 之半，如此逐步構造，所得的三角形內角和保持為 $\pi+\epsilon$，而其最小內角的大小每次至少減半，所以只要作足夠多次得一個三角形，其最小內角小於 ϵ，亦即其另外兩個內角之和大於 π，此事顯然和推論 1 互相矛盾。

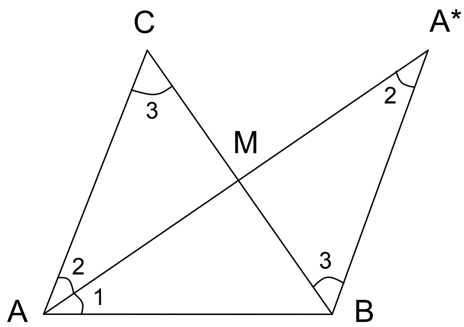


Figure 1.6:

定理 1.4 若存在一個三角形其內角和等於 π，則任何三角形的內角和皆恆等於 π。

證明

設有一個三角形 $\triangle ABC$ 其內角和等於 π，則由其大角 $\angle C$ 到其對邊 $\overline{AB}$ 作垂線 $\overline{CD}$。即有

$$\left(\angle 1+\angle A+\frac{\pi}{2}\right)+\left(\angle 2+\angle B+\frac{\pi}{2}\right)=\angle A+\angle B+\angle C+\pi=2\pi，$$

$$\Longrightarrow\quad \angle 1+\angle A+\frac{\pi}{2}\le\pi，\qquad \angle 2+\angle B+\frac{\pi}{2}\le\pi。\qquad\text{（定理 1.3）}$$

所以直角三角形 $\triangle CDA$ 和 $\triangle CDB$ 的內角和也都等於 π。用其中之一即可得一個四內角皆為 $\pi/2$ 的「矩形」，如圖 1.7 所示的矩形 $CDBD*$。將這個矩形一堆砌即可得出長和寬都可以任意大的矩形，如圖 1.8所示。

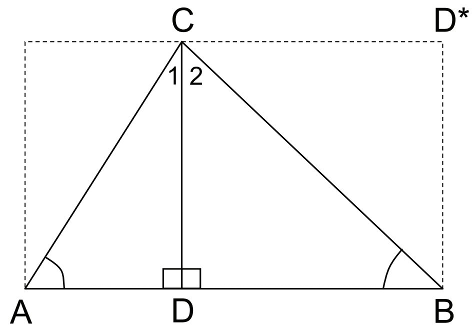


Figure 1.7:

現在我們要用定理 1.3 來證明任何直角三角形的內角和都必然等於 π。設 $\triangle A_1B_1C_1$ 是一個任給直角三角形，$\angle C_1 = \pi/2$，我們可以用圖 1.9 所作的那個足夠大的矩形構造 $\triangle A_1'B_1'C_1' \cong \triangle A_1B_1C_1$，使得其直角邊 $\overline{A_1'C_1'}$ 和 $\overline{B_1'C_1'}$ 都包含在該矩形的兩個直角邊之內，如圖 1.9 所示。 $\triangle C_1'DF$ 的內角和 $= x$

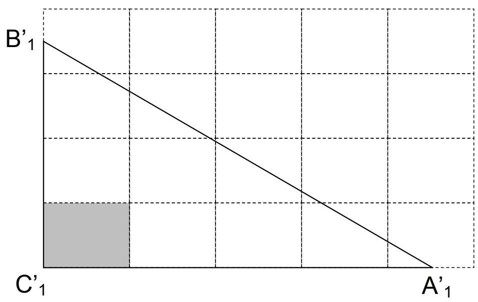


Figure 1.8:

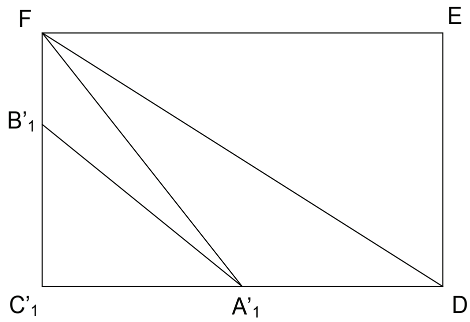


Figure 1.9:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \triangle\, C_1'A_1'F \text{ 的內角和} + \triangle A_1'DF \text{ 的內角和} \ = 2\pi \\
&\Rightarrow \quad \triangle\, C_1'A_1'F \text{ 的內角和} \ = \pi && \text{（定理 1.3）} \\
&\Rightarrow \quad \triangle\, A_1'B_1'C_1' \text{ 的內角和} + \triangle A_1'B_1'F \text{ 的內角和} \ = 2\pi \\
&\Rightarrow \quad \triangle\, A_1'B_1'C_1' \text{ 的內角和} = \pi && \text{（定理 1.3）}
\end{aligned}
$$

這樣就證明了任何直角三角形的內角和皆等於 π。而任何三角形都可以像圖 1.7 那樣分割成兩個直角三角形，所以它的內角和也必然等於 π。

【註】 定理 1.3 和定理 1.4 證明了在任何滿足連結、分隔、疊合（對稱性）的幾何之中，三角形的內角和不是恆等於 π 就是恆小於 π 。前者是歐氏幾何，而後者則是非歐幾何。在後者的情形，我們還可以證明下述角虧（angle defect）

$$\pi - \big(\angle A + \angle B + \angle C\big)$$

和 $\triangle ABC$ 的面積成比例。

1.2 例題和習題

【例】

(1) 光的反射定律與極小性：光的反射定律是「入射線、反射線和平面在反射點的法線三線共面，而且兩者和法線的夾角相等」。

上述定律的幾何意義是光的反射途徑是在所有下述通路

$$\overline{PX}+\overline{XQ}, \qquad X\in\ell,$$

之中取極小值，如圖 1.10 所示

$$\begin{aligned}&\overline{PA}+\overline{AQ}=\overline{P'A}+\overline{AQ}=\overline{P'Q}\\ \le&\overline{PX}+\overline{XQ}=\overline{P'X}+\overline{XQ}。\end{aligned}$$

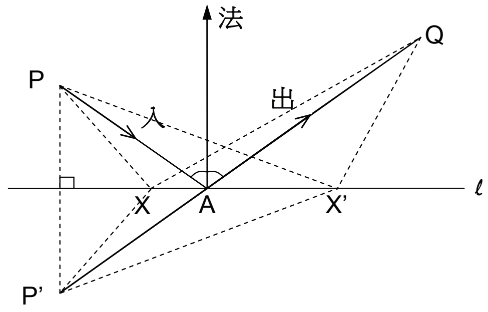
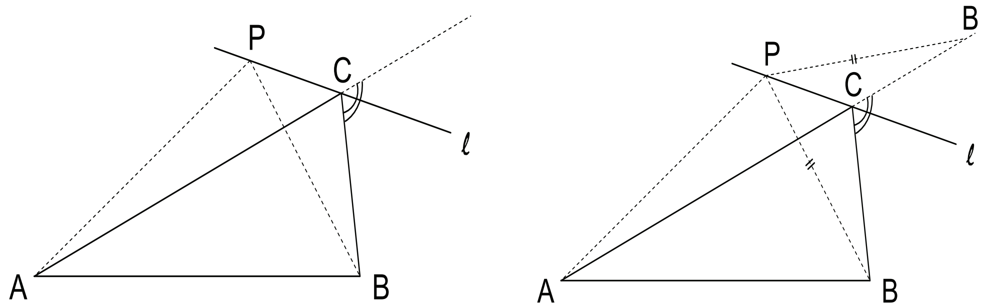


Figure 1.10:

(2) 給定 $\triangle ABC$，如圖 1.11(a) 所示令 ℓ 為 C 點外角的角分線。設 P 是 ℓ 上一點，$P\neq C$，則恆有

$$\overline{AP}+\overline{PB}>\overline{AC}+\overline{CB}。$$



(a) (b)

Figure 1.11:

如圖 1.11(b) 所示，令 $B*$ 為 B 相對於 ℓ 的反射對稱點，所以即有 $\overline{PB}=\overline{PB*}$。由此可見，

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PB}=&\overline{AP}+\overline{PB*}\\ >&\overline{AB*}=\overline{AC}+\overline{CB*}\\ =&\overline{AC}+\overline{CB}。\end{aligned}$$

(3) 內切圓作圖：對於一個給定的 $\triangle ABC$，唯一存在一個和其三邊相切的圓，稱之為 $\triangle ABC$ 的內切圓（如圖 1.12 所示）。其作圖法如下：

用基本作圖 1.13，分別作 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的角平分線，則兩線交點 O 乃是具有和三邊等距的唯一之點，所以它就是所求作的內心（內切圓圓心）。

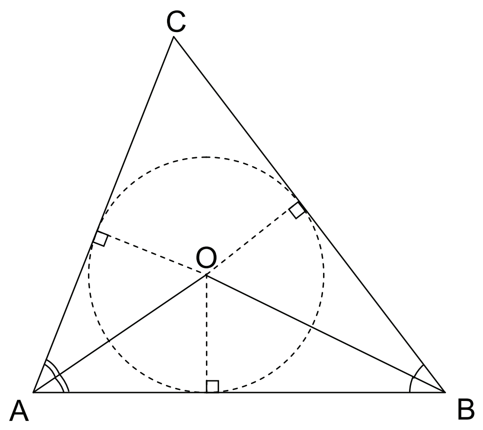


Figure 1.12:

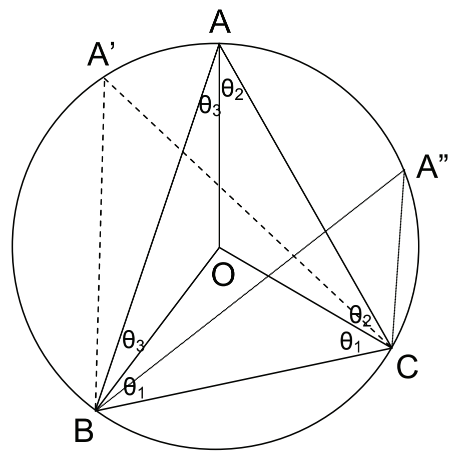


Figure 1.13:

(4) 設 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'BC$ 具有相同的外接圓，則

$$\angle ABC + \angle ACB - \angle BAC = \angle A'BC + \angle A'CB - \angle BA'C。$$

【習題】

1. 試證明在定理 1.2 中的「大角對大邊」部分。
2. 試證明在基本作圖題 ?? 中的 X_1X_2 是過 ℓ 上 M 點的垂線。
3. 試證明在基本作圖題 ?? 中的 PP' 乃是垂直於 ℓ 的直線。
4. 設直線 ℓ 和圓 Γ 僅交於一點 P，試證 $\overline{OP} \perp \ell$。
5. 設四邊形 $ABCD$ 的兩對角線互相平分，試證：
   (i) 其對角線互相平分；
   (ii) 其兩對對角線分別相等。

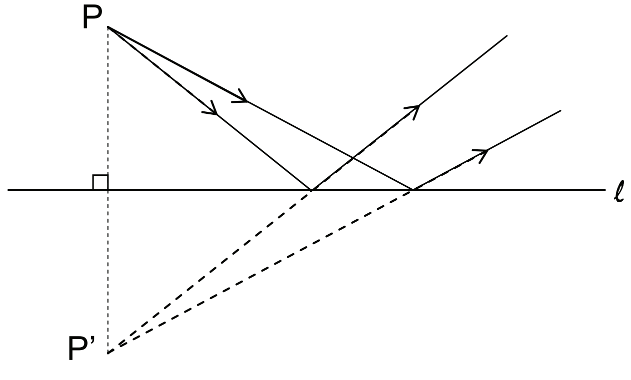


Figure 1.14:

6. 設四邊形 $ABCD$ 的兩對角線互相平分，試證：
   (a) 其兩對對邊分別等長；
   (b) 其兩對對角分別相等。
7. 設 $\triangle ABC$ 的 $\angle C$ 角分線等分對邊 $\overline{AB}$，試證 $\overline{AC} = \overline{BC}$。（延長 $\overline{CM}$ 到 $\overline{CD} = 2\overline{CM}$，如圖 1.15 所示，則可運用習題 6 之結果。

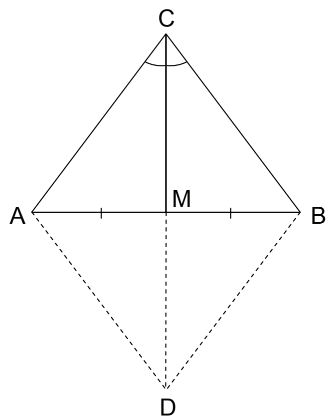


Figure 1.15:

8. 給定 $\triangle ABC$，如圖 1.16 所示令 ℓ' 為 $\angle C$ 的角分線，P' 是 ℓ' 上一點，$P' \neq C$，試證明 $\overline{AP'} - \overline{P'B} < \overline{AC} - \overline{CB}$。

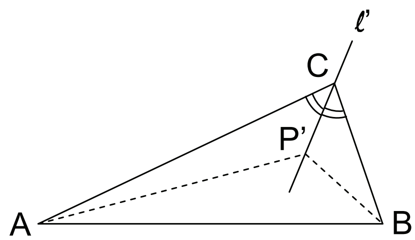


Figure 1.16:

Chapter 2

定量平面幾何基礎之初建：從中西定量平面幾何的比較分析講起

一般來說，我們對於事物的研究，大體上都先作定性的探討，然後再作定量的分析。這是一種由表及裡、逐步深入、精益求精的自然進展，平面幾何學的研究當然也遵循著這樣一種自然的順利成章的途徑。由上一章的討論中可以看到，在定性地探討幾何中的「等」與「不等」時，我們可以完全不用平行性；但是在定量的平面幾何中，我們要對於不等長的兩個線段，不同大小的兩個角區或不同大小的兩個區域，賦以兩者之間定量的比值去度量（Measure）兩者之間的差別。在這個時候，平行性扮演著一個舉足輕重的「角色」，其作用是大大簡化了定量幾何的基礎理論和基本公式。換句話說，在定量幾何中，三角形內角和是恆等於平角還是恆小於平角這兩種幾何開始有了重大的差別。前者的基本公式要比後者的基本公式簡單得多！在前者有簡樸易用的基本定理如矩形面積公式、勾股定理和相似三角形定理；而在後者所相應者，不是根本沒有，就是要複雜得多。

在本章中，我們將會簡明扼要地討論平行性如何反映在平面幾何的基本定理之上。再者，我們還會比較分析一下古代中國和古希臘對於定量平面幾何的治學方法。

2.1 平行性和三角形內角和

在歐幾里德（Euclid）的原著《幾何原本》（*Elements*）中，平面的平行性是用下述**第五公設**（fifth postulate），也就是我們通常稱之為**平行公理**（parallel axiom）者，來加以刻畫的。

【第五公設】 設 ℓ_1, ℓ_2 和 ℓ 是平面上三條相異直線，若 ℓ 和 ℓ_1, ℓ_2 相交的同傍內角（如圖 2.1 所示之 $\angle 1$ 和 $\angle 1'$）之和小於平角，則 ℓ_1, ℓ_2 必定在 $\angle 1$ 和 $\angle 1'$ 的同側相交。

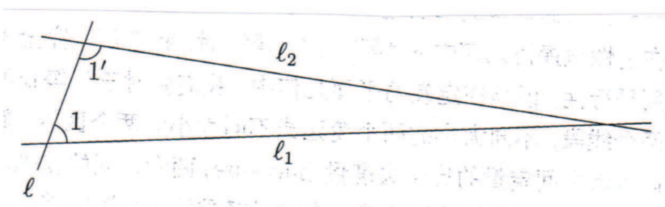


Figure 2.1:

即 $\angle 1 + \angle 1' <$平角 $\Rightarrow \ell_1, \ell_2$ 相交於 $\angle 1, \angle 1'$ 之同側。另一方面，在上一章中我們只需用到 S.A.S. 和「兩點確定唯一直線」就可以證門下述定理 2.1。

定理 2.1 若 $\angle 1 = \angle 2$，則 ℓ_1, ℓ_2 不相交。

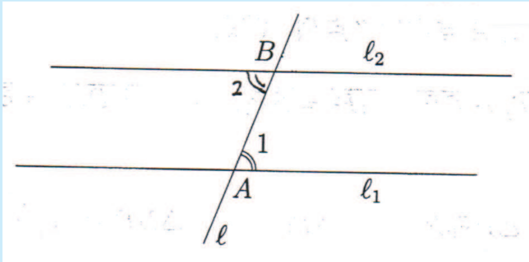


Figure 2.2: Wrong figure

由此可見，上述的第五公設也就是以「公設」的方式宣稱 $\angle 1 + \angle 1' = \pi$ 是 ℓ_1, ℓ_2 不相交的唯一可能性。換句話說，在平面上過直線 ℓ_1 外的一個給定點 P，而且和 ℓ_1 不相交的直線 ℓ_2 的存在性是已證的定理 **??**，而其唯一性則就是上述第五公設，即是使得同傍內角之和 $\angle 1 + \angle 1' = \pi$ 的那一條 ℓ_2 是唯一和 ℓ_1 不相交者。用這個唯一假設，就不難推導平直性：三角形內角和恆為一平角（其證明留作習題）。其實，反之也可用平直性來證明上述第五公設，其證法如下。

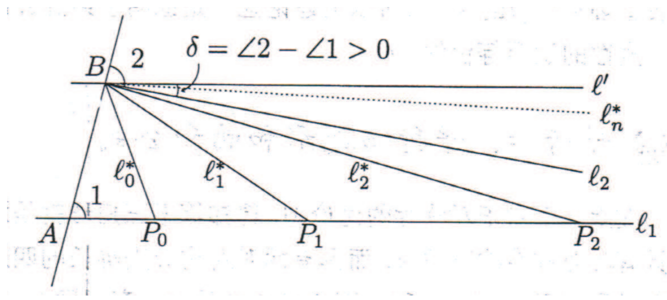


Figure 2.3:

證明

如圖 2.3 所示，ℓ' 是使得同位角 $\angle 2' = \angle 1$ 的直線，由所設 $\delta = \angle 2 - \angle 2' = \angle 2 - \angle 1 > 0$。令 $\{P_0, P_1, \cdots, P_n, \cdots\}$ 是在 ℓ 上 A 點右側之點列，滿足

$$\overline{P_0P_1} = \overline{BP_0}, \quad \overline{P_1P_2} = \overline{BP_1}, \quad \cdots, \overline{P_nP_{n+1}} = \overline{bP_n}\text{，}$$

即

$$\triangle BP_0P_1, \quad \triangle BP_1P_2, \quad \cdots, \quad \triangle BP_nP_{n+1}, \quad \cdots$$

都是等腰三角形。由平直性和等腰三角形的底角相等，即有 ℓ' 和 $\ell*_n = BP_n$ 之間的夾角逐次減半，所以在 n 足夠大時，其值小於 $\delta = \angle 2 - \angle 1 > 0$，即當

$$2^n > \frac{\angle AP_0B}{\delta}$$

時，$\ell *_n$ 已經夾在 ℓ_2 和 ℓ' 之間。但是由所作 $\ell *_n$ 和 ℓ_1 相交於 P_n，所以 ℓ_2 必然和 ℓ_1 相交於線段 $\overline{AP_n}$ 之內。

（注意，上述證明之中，三角形內角和恆等於一個平角扮演著必不可缺的角色！所以上述論證只是證明了第五公設和平直性的邏輯等價性。）

2.2 平行性、平行四邊形

在上一章對於對稱性的討論中，得知等腰三角形就是那些具有軸對稱性的三角形。而具有兩對對邊分別等長的四邊形則是那些具有中心對稱的四邊形（參看上一章習題）。它的對稱中心就是其兩條互相平分的對角線的交點，而且它的兩對對角也分別相等，證明要點在於每一條對角線把該四邊形切為兩個全等三角形（S.S.S.），而兩條對角線則把它切為兩對互相全等的三角形（A.S.A.）。

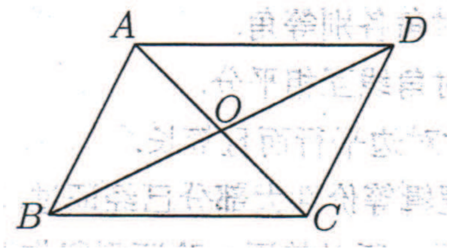


Figure 2.4:

上述的論證只用到疊合條件，不需要平行性的幫助。假如我們把平行性再用上去分析上述四邊形的幾何結構，則由對角相等

$$\angle A = \angle C, \qquad \angle B = \angle D$$

和四內角和等於　合起來就得出

$$\angle A + \angle B = \angle A + \angle D = \angle C + \angle B = \angle C + \angle D = \pi，$$

即其對邊互相平行：

$$AB//DC, \qquad AD//BC。$$

所以把這種四邊形叫做**平行四邊形**（parallelogram）。我們把平行四邊形的各種特徵性質總結如下，敘述為本章的定理 2.2，它是研究平行性在幾何學中各種各樣的反映的主要工具。（它在平行性的研究上所扮演的角色一如等腰三角形在對稱的研究上所扮演的角色——都是到處有用和好用的基本工具，應該把它看成為第二個**基本引理**。）

定理 2.2 下列各特性皆為平行四邊形的特徵性質：

(i) 兩對對邊互相平行（定義）；

(ii) 兩對對邊各別等長；

(iii) 兩對對角各別等角；

(iv) 兩條對角線互相平分；

(v) 有一對對邊平行而且等長。

（上述五點的邏輯等價性大部分已經證過，而且證明的要點也在上面說明了，所以其逐一驗證則留作習題。）

【定義】 四個內角皆相等（即都是直角）的四邊形叫做**矩形**（rectangle），也稱為**長方形**。

2.3 矩形面積公式和中國古算中的測量公式

矩形的面積等於長乘寬，例如一個長為 ℓ 公尺，寬為 ω 公尺的矩形，顯然可以平行分割成 $\ell \times \omega$ 個一公尺見方的小方塊，所以其面積就是 $\ell \times \omega$ 平方公尺。在中國古算中把此事作為毋庸置疑的基點，善用面積去推導出一套測量公式（流傳於建造水利工程的設計師和建造房屋樓閣的工匠之間），長話短說。

大概遠在戰國時代，定量幾何知識是以一套簡樸實用的測量公式在工匠和水利工程師之間流傳，如公輸般、墨子、西門豹、李冰、李二郎等很可能就是中國古文明中幾何知識的創建者和繼承者。在中國古算中，一個直角三角形的兩個直角邊分別叫做「勾」和「股」，而斜邊則叫做「弦」，如圖 2.5 所示。

中國古代幾何的獨到灼見是善用面積，以矩形面積等於長乘寬為基礎，推導直角三角形的面積等於底乘高之半，然後再用下述圖解簡潔利落地證明了勾股弦公式（或稱作勾股定理）和相似直角三角形的比例式。

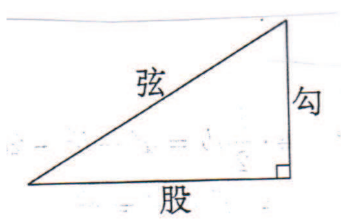


Figure 2.5:

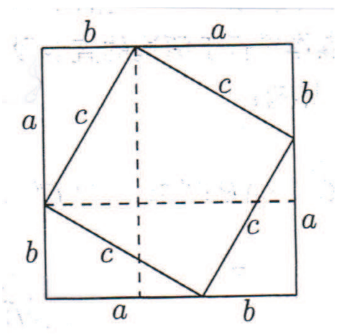


Figure 2.6:

如圖 2.6 所示，一個以 $a+b$ 為邊長的正方形可以有如實線和虛線所示的兩種分割：前者把它分割成一個以 c 為邊長的正方形和 4 個以 a, b 為直角邊的直角三角形；而後者則它分割成兩個以 a, b 為邊長的矩形和兩個分別以 a, b 為邊長的正方形。用以上述兩種分割法去計算其總面積，即得下述等式

$$c^2 + v \cdot \frac{1}{2}ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$\Longrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2 \text{。}$$

即勾方加股方等於弦方。

2.3.1 出入相補原理

在中國的古算測量術中，其所用的基本工具就是上述勾股弦公式和下述出入相補原理。

如圖 2.7 所示，在一個給定的矩形的對角線上任取一點 C'，再過 C' 點作平行於兩邊的直線段（在實際測量中的水平線和垂線），則有：

$$\triangle ABC \cong \triangle ADC, \quad \triangle AB'C' \cong \triangle AFC', \quad \triangle C'GC \cong \triangle C'EC。$$

所以圖 2.7 所示的兩個矩形面積相等，即

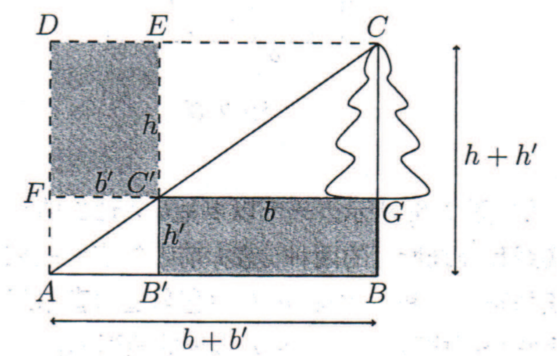


Figure 2.7:

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \quad b \cdot h' &= S_{\text{矩形 } B'BGC} = S_{\triangle AB'C'} - S_{\triangle C'GC} \\ &= S_{\triangle ADC} - S_{\triangle AFC'} - S_{\triangle C'EC} = S_{\text{矩形 } FC'ED} = b' \cdot h \\ \Longrightarrow \quad \frac{b}{b'} &= \frac{h}{h'} \quad \Longrightarrow \quad \frac{b+b'}{b'} = \frac{h+h'}{h'},\end{aligned}$$

即

$$\overline{AB} : \overline{AB'} = \overline{BC} : \overline{BC'}。$$

即相似直角三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AB'C'$ 的對應直角邊邊長比例式。由它再加上勾股弦公式，就可以推導 $\overline{AC} : \overline{AC'}$ 也等於上述比值。再者，兩個一般的相似三角形總可以用垂線分割成兩對相似的直角三角形，所以一般的相似三角形定理又可以直截了當地歸於相似直角三角形的對應邊比例式去推導。

若用現代定量平面幾何的知識來分析，上述矩形和直角三角形的面積公式，以及勾股弦和出入相補比例式其實已經構成一組完備的定量平面幾何基礎。它不但簡明扼要，而且用面積公式直截了當地一以貫之。這種處理方式易學好用，至今依然是定量平面幾何入門的捷徑。

再者，上述討論也啓示我們相似三角形定理本身應該也可以用中國古法，以簡簡單單的面積計算來加以證明。

定理 2.3 （相似三角形定理）
設 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三個對應角相等，則有其三個對應邊邊長成比例，即

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} (= k)。$$

證明一

如圖 2.8 所示，我們不妨設 $A' = A$，$\overline{B'C'}//\overline{BC}$。效法中國古法，我們用兩種辦法去計算梯形 $BCC'B'$ 的面積：

$$S_{\text{梯形 } BCC'B} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AB'C'} = \frac{1}{2}ah - \frac{1}{2}a'h'，$$

$$S_{\text{梯形 } BCC'B} = S_{\triangle BCC'} + S_{\triangle BC'B'} = \frac{1}{2}(h-h')(a+a')。$$

由兩式相減，即得

$$0 = \frac{1}{2}(ah' - a'h) \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{a'} = \frac{h}{h'}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}a'h'} = \left(\frac{a}{a'}\right)\left(\frac{h}{h'}\right) = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 。$$

同理可得 $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle A'B'C'}$ 也等於 $(b/b')^2$ 和 $(c/c')^2$，即

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 = \left(\frac{b}{b'}\right)^2 = \left(\frac{c}{c'}\right)^2 。$$

而兩個正數的平方相等時，其本身也相等，所以

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} 。$$

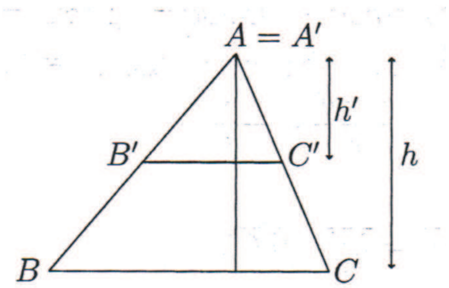


Figure 2.8:

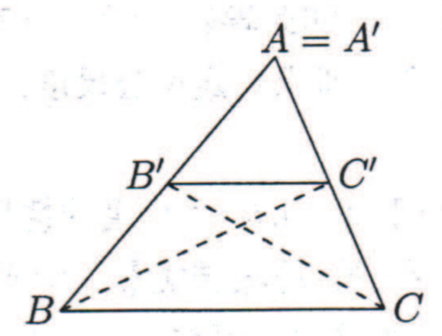


Figure 2.9:

證明二

如圖 2.9 所示，$\triangle BCB'$ 和 $\triangle CC'B$ 是同底等高，所以它們的面積相等。因此 $\triangle BC'A$ 和 $\triangle CAB'$ 的面積也相等。再者 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABC'$ 是同底的，所以

$$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle ABC'} = \overline{AC} : \overline{AC'} 。$$

同理亦有 $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle AB'C} = \overline{AB} : \overline{AB'}$，因為 $\triangle ABC'$ 和 $\triangle AB'C$ 等面積，所以

$$\overline{AC} : \overline{AC'} = \overline{AB} : \overline{AB'}，$$

這也就是我們所要證的相似比例式。

如今回顧反思中國古代的定量平面幾合何，善用矩形面積的實驗性公式，簡潔地推導出勾股弦定理和直角三角形的相似比例式，業已基本上完備好用。

2.4 希臘幾何學的定量幾何基礎初論

幾何學是古希臘文明最輝煌的成就，它是以古埃及和古巴比倫文明的幾何知識為基礎，集希臘的精英，歷經好幾世紀世代相承、精益求精的研究創造而成，是人類文明中第一個趨於成熟的科學，所以治學十分嚴謹，高度注重其基本概念的明確性和推理論證上的嚴格性。它不但是其他自然科學的基礎所在，而且也是整個自然科學在思想上、方法論上治學的典範。古希臘幾何學的進程是先研究定性平面幾何，其研究主題是全等形和平行性，然後再進而研究定量平面幾何，而且一開始他們就認識到直線段長度的度量（Measurement of length）是定量幾何研究的起點和基礎所在。通常的做法是先取定（或約定）一個單位長（Unit of length），它可以是公尺、市尺、英尺，或光在真空走一秒的長度「光秒」，也可以是「光年」，然後把一個給定直線段的長度定義為它和單位長之間的比值（Ratio）。由此可見，長度度量這個基本概念的關鍵在於上述比值的明確定義。

設給定段線 a 恰好可以等分成 m 段和單位長 u 等長的線段首尾相接而成，則 a 和 u 之間的比值當然就是 m，而稱這樣的直線段 a 的長度是 m 單位。反之，若單位長 u 恰好可以等分成 n 段和 a 等長的線段首尾相接而成，則 a 和 u 之間的比值應該等於 $1/n$。再者，若 a 恰好可以等分成 m 段和 $\frac{1}{n}u$ 等長的線段連接而成，則 a 和 u 之間的比值應該定義為分數 m/n，稱 a 的長度是 m/n 單位，以 $a = \frac{m}{n}u$ 表達之。

大約在紀元之前五世紀前後，古希臘的幾何學學界（例如畢達哥拉斯及其門人）關於長度度量提出下述概念及論斷：

【可公度性（Commensurability）】 對於兩個直線段 a, b 若存在一個公尺度（Common yardstick）c 恰能同時整量 a, b，即 a, b 都是 c 的整數倍時：$a = m \cdot c$，$b = n \cdot c$，則稱 a, b 為**可公度**（Commensurable），而 a, b 的長度比值就定義為分數 m/n。另外一個等價的說法就是：若存在適當的整數 m, n，使得 $n \cdot a$ 和 $m \cdot b$ 恰好等長，則稱 a, b 為可公度，而這樣的 a, b 長度的比值就定義為 m/n。

然後他們主觀地論斷：「**任何兩個直線段總是可公度的**」，即可公度性是普遍成立的（Universal validity of commensurability）。並且以此作為他們當年所致力構築的定量幾何基礎論的「頭號公理」（Principle Axiom），即以「可公度性的普遍成立」為依據、為基石（Foundation），給定量幾何中的基本定理如矩形面積公式、畢氏定理、相似三角定理給出其證明。大致上，下面所述就是他們當年對於矩形面積公式的證明。

設矩形的長度和寬分別是 ℓ 和 ω，而 u 則是取定的單位長度。由可公度性普遍成立的公設，即分別有 $\{\ell, u\}$ 和 $\{\omega, u\}$ 的公尺度 c, c'，使得它們分別是 c, c' 的整數倍，即

$$\ell = m \cdot c\text{，}\qquad u = n \cdot c\text{，}\qquad \omega = p \cdot c'\text{，}\qquad u = q \cdot c'\text{。}$$

如圖 2.10 所示，$\square(\ell, \omega)$ 和 $\square(u, u)$ 分別可以用平行線分割成 $m \cdot p$ 和 $n \cdot q$ 個 (c, c')。由此可見，

$$\begin{aligned} \square(\ell, \omega) &= (m \cdot p)\square(c, c')\text{，} \\ \square(u, u) &= (n \cdot q)\square(c, c')\text{。} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \square(\ell, \omega) : \square(u, u) =& \frac{mp}{nq} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \\ =& (\ell : u) \cdot (\omega : u)\text{。} \end{aligned}$$

這也就是矩形的面積等於長乘寬的真正含義。

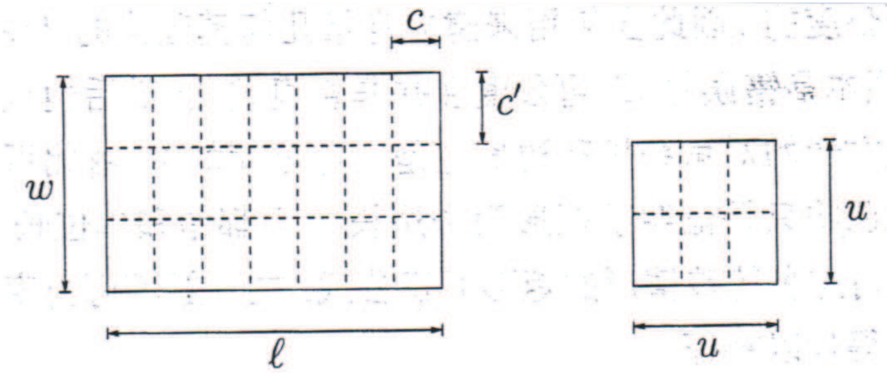


Figure 2.10:

總之，他們當年基於「可公度性普遍成立」這個「公設」，對於定量平面幾何的重要公式如畢氏定理、相似三角形邊長比例式等等，都給以嚴格的證明，建立起洋洋大觀的定量平面幾何基礎論。其中畢氏學派的貢獻良好，引以自豪。

【歷史的註記】 假如任何兩個直線段真的總是可公度的，則上述證明已經完整無缺地證明了矩形面積公式。但是在畢氏本人百年之後不久，其門徒 Hippasus 卻有一個石破天驚的發現，那就是一個正五邊形的對角線長和其邊長是**不可公度的**！因此當年用來建立定量幾何基礙論的「頭號公設」根本是錯誤的！即可公度性並非普通成立（隨後他也證明了正方形的對角線長和邊長也是不可公度的）。由此可見，上述證明只是證明了矩形了矩形兩個邊長 a, b 都是和單位長 u 可公度時這種特殊情形的矩形面積公式，在一般不可公度的情形還得加以補證！

另一點值得在此一提的是上述證明中很關鍵地用了平行分割，所以矩形面積公式和平行性是必然相關的。當然在三角形內角和恆小於平角的幾何中，任何四邊形的四個內角和恆小於 2π，所以根本沒有四個內角均為直角的四邊形。但是矩形在那種幾何中其實還是有自然的推廣，那就是兩對對邊分別等長而且其兩條對角線也等長的那種四邊形，它的面積是其兩個邊長的函數，可是其公式要比 $a \cdot b$ 複雜得多！（參看第七卷：重訪絕對幾何學（Absolute geometry of Bolyai）：歐氏、球面、非歐幾何的統一理論。）

2.5 石破天驚。希臘幾何學的巨震：Hippasus 的偉大發現

話說當年，畢氏的門徒Hippasus 對於當年定量幾何學的頭號公設，即「直線段之間可公度性普遍成立」一直在鍥而不捨地鑽研。在當年，至少他已認識到下述兩個給定的可公度線段 a, b 的最長公尺度的幾何求法。

【輾轉丈量法】 設 $a < b$，我們用 a 為尺去丈量 b。若恰能整量，即 $b = n_1 a$，則顯然 a 本身就是 $\{a, b\}$ 的最長公尺度。不然，$b = n_1 a + r_1, r_1 < a$ 再用 r_1 為尺丈量 a。若恰能整量，則 r_1 即為 $\{a, b\}$ 的最長公尺度。不然，$a = n_2 r_1 + r_2$。再用 r_2 為尺丈量 r_1，如此輾轉丈量，一直到 r_k 恰能整量 r_{k-1} 為止。則 r_k 即為所求的最長公尺度。

【歷史的註記】 在 $\{a, b\}$ 可公度的情形，即有 $a = mc$，$b = nc$。相應於 $\{a, b\}$ 的輾轉丈量，即有 $\{m, n\}$ 的輾轉相除求最大公因數的算法，而在 $r_k = d \cdot c$ 式當中，d 就是 m, n 的最大公因數。因為這種輾轉相除算法寫在歐幾里得的*Elements* 中，所以通常稱之為歐氏算法（Euclidean Algorithm）。但是在古希臘極可能是先有輾轉丈量求最長公尺度，因為這是當年學者們鑽研的定量幾何基本問題。總之由其一自然也就可直接對

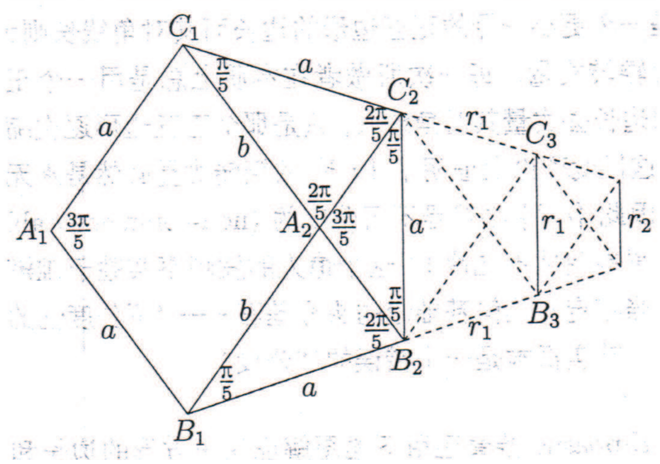


Figure 2.11:

應而有其另一。所以歐氏算法顯然在歐氏的*Elements*之前二百年即已為 Hippasus 所知和所用。

話說當年，Hippasus 在沙盤上用蘆葦桿畫了一個大致如圖 2.11 所示的正五邊形，然後開始用當時已經熟知的等腰三角形定理和三角形內角和定理來作下述分析，即 (i) 三角形內角和恆等於 π（平角）；和 (ii) 等腰三角形的兩底角相等，反之，兩底角相等的三角形必為等腰。

五邊形的內角和恆等於 3π，所以上述正五邊形 $A_1B_1B_2C_2C_1$ 的每個內角都等於 $3\pi/5$，由此可見等腰三角形 $\triangle B_1B_2C_2$ 和 $\triangle B_2C_2C_1$ 的兩底皆為 $\pi/5$，令對角線 $\overline{B_1C_2}$ 和 $\overline{B_2C_1}$ 的交點為 A_2，則有 $\triangle C_1A_2C_2$ 的兩底角皆為 $2\pi/5$，而 $\triangle A_2B_2C_2$ 的兩底角皆為 $\pi/5$，所以它們都是等腰的。

上述看來不起眼的幾何分析卻使得 Hippasus 大為震驚！為什麼呢？若以上述五邊形的邊長 a 去丈量其對角線長 b，則其餘段 r_1 就是等腰 $\triangle A_2B_2C_2$ 的等邊邊長。若將 $\overline{C_1C_2}$ 延長一段 $\overline{C_2C_3} = r_1$，$\overline{B_1B_2}$ 延長一段 $\overline{B_2B_3} = r_1$，則易證五邊形 $A_2B_2B_3C_3C_2$ 又是一個正五邊形，而它的邊長是 r_1，對角線長則是 a。

因此當我們再用 r_1 去丈量 a 時，在本質上又是用一個正五邊形的邊長去丈量其對角線長。同理，所得的餘段 r_2 又是一個更小一號的正五邊形的邊長而其對角線長則為 r_1 。如此輾轉丈量，每一次所做者在本質上總是用一個正五邊形的邊長去丈量其對角線長，只是那個正五邊形逐次縮小吧了。這樣就理論上證明了 $\{a, b\}$ 的輾轉丈量必然是永無上休的！因此 $\{a, b\}$ 必然是不可公度的（Non-commensurable）！此事焉能叫他不吃驚！？這個驚人的發現事實勝於雄辯地證明了當年定量幾何基礎論的頭號基石——「可公度性的普遍成立」其實根本是一個錯誤的「公設」！

Hippasus 接著還還下述圖解證明正方形的邊長和對角線長 $\{a', b'\}$ 之間的輾轉丈量也是永無止休的，所以也是不可公度的。

由圖 2.12 可以看出 $\{a', b'\}$ 的輾轉丈量所得的逐步算式是

$$b' = a' + r_1，$$
$$a' = 2r_1 + r_2，$$
$$r_1 = 2r_2 + r_3，$$

往後的表達式總是

$$r_{k-1} = 2r_k + r_{k+1}，$$

所以是永無止休的（細節的證明留作習題）。

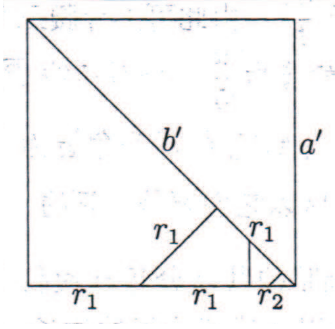


Figure 2.12:

【歷史的註記】 Hippasus 的偉大發現，是人類理性文明的重要里程碑，有如發現了一個理念上的新大陸，它不單對於定量幾何學有根本的重要性，其實對於整個自然科學都有深遠的影響。但是當年古希臘幾何學界，特別是 Hippasus 本人所在的畢氏學派對於這個偉大發現的反應，卻是全然無理性的。據某些現在已不可詳考的記載，Hippasus 反而因為這個重大發現而喪生於同門之手。

2.6 例題和習題

【例】

(1) 令 D, E 分別為 $\triangle ABC$ 兩邊 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 的中點，試證 $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 而且 $\overline{DE} // \overline{BC}$。

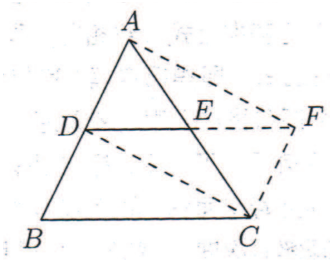


Figure 2.13:

證明： 如圖 2.13 所示，延長 $\overline{DE}$ 至 $\overline{DF}$，使得 $\overline{EF} = \overline{DE}$，則 E 點平分 $\overline{DF}$ 和 $\overline{AC}$，所以平行四邊 $ADCF$ 乃是一個平行四邊形。由此可得 $\overline{FC}$ 與 $\overline{AD}$ 為平行等長，即 $\overline{FC}$ 與 也為平行等長，因此平行四邊形 $BCFD$ 亦是一個平行四邊形。所以 $\overline{DF}$ 與 $\overline{BC}$ 為平行等長，即得所求證。

(2) $\triangle ABC$ 的三條中線交於一點（稱之為**重心**，試證：該點把每條中線均分成 2:1 的兩段。

證明： 令中線 $\overline{BF}$ 和 $\overline{CD}$ 的交點為 O。取 D', F' 分別為 $\overline{OB}$ 和 $\overline{OC}$ 的中點，則有（見例題 (1)）

$$\overline{D'F'} = \frac{1}{2}\overline{BC} \quad \text{而且} \quad \overline{D'F'} // \overline{BC}。$$

所以 $\overline{D'F'}$ 與 $\overline{DF}$ 為平行等長，即平行四邊形 $D'F'FD$ 是一個平行四邊形。所以

$$\overline{DO} = \overline{OF'}, \qquad \overline{D'O} = \overline{OF},$$

即得所求證。

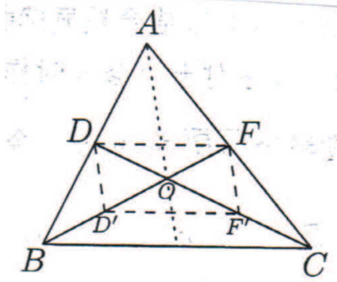


Figure 2.14:

(3) **相似三角形定理在整數比時的古希臘證法**

如圖 2.15 所示，$B'C'$ 是分別位於 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 的延長線上之點，滿足 $\overline{AB'} = n\overline{AB}$，$B'C'//BC$，$n$ 為正整數。試證 $\overline{AC'} = n\overline{AC}$，$\overline{B'C'} = n\overline{BC}$。

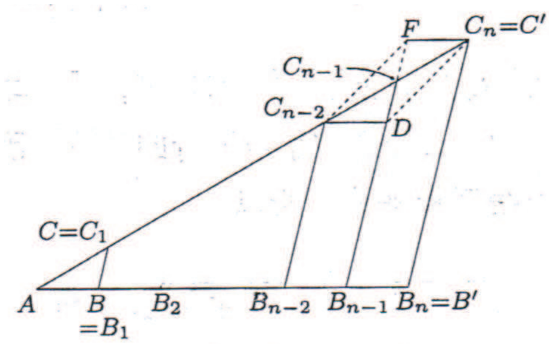


Figure 2.15:

歸納證明： 當 $n = 1$ 時結果是顯然的。當 $n = 2$ 時就是例題 (1) 之所證。現在對於 $n \geq 3$ 時作歸納證明如下：

以 $\overline{AB}$ 之長度等分 $\overline{AB'}$ 為 n 段，令其等分點為

$$B = B_1, B_2, \cdots, B_{n-2}, B_{n-1}, B' = B。$$

過 B_{n-2} 及 B_{n-1} 作兩條平行於 BC 的直線

$$B_{n-2}C_{n-2}//BC， \qquad B_{n-1}C_{n-1}//BC，$$

其中 C_{n-2} 及 C_{n-1} 為 AC' 上兩點；再過 C_{n-2} 及 C' 作兩條平行於 AB 的直線

$$C_{n-2}D//AB， \qquad FC'//AB，$$

其中 D 及 F 為 $B_{n-1}C_{n-1}$ 上兩點，如圖 2.15 所示。

由所作易見平行四邊形 $B_{n-2}B_{n-1}DC_{n-2}$ 和平行四邊形 $B_{n-1}B'C'F$ 都是平行四邊形，所以

$$\begin{array}{ccc} \overline{C_{n-2}D} & 與 \ \overline{B_{n-2}B_{n-1}} & 為平行等長， \\ \overline{FC'} & 與 \ \overline{B_{n-1}B'} & 為平行等長； \end{array}$$

由所作有 $\overline{B_{n-2}B_{n-1}} = \overline{B_{n-1}B'}$，所以 $\overline{C_{n-2}D}$ 與 $\overline{FC'}$ 也為平行等長，即平行四邊形 $C_{n-2}DC'F$ 亦是平行四邊形。因為平行四邊形的兩條對角線互相平行，所以

$$\overline{C_{n-1}C'} = \overline{C_{n-2}C_{n-1}} \quad 和 \quad \overline{C_{n-1}F} = \overline{DC_{n-1}}。$$

現在歸納假設可得

$$\overline{AC_{n-2}} = (n-2)\overline{AC}，\qquad \overline{B_{n-2}C_{n-2}} = (n-2)\overline{BC}，$$
$$\overline{AC_{n-1}} = (n-1)\overline{AC}，\qquad \overline{B_{n-1}C_{n-1}} = (n-1)\overline{BC}。$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{C_{n-2}C_{n-1}} =& \overline{AC_{n-1}} - \overline{AC_{n-2}}\\ =&(n-1)\overline{AC} - (n-2)\overline{AC} = \overline{AC}，\\ \overline{DC_{n-1}} =& \overline{B_{n-1}C_{n-1}} - \overline{B_{n-1}D}\\ =&\overline{B_{n-1}C_{n-1}} - \overline{B_{n-2}C_{n-2}}\\ =&(n-1)\overline{BC} - (n-2)\overline{BC} = \overline{BC}，\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\overline{AC'} =& \overline{AC_{n-1}} + \overline{C_{n-1}C'} = \overline{AC_{n-1}} + \overline{C_{n-2}C_{n-1}}\\ =&(n-1)\overline{AX} + \overline{AC} = n\overline{AC}，\\ \overline{B'C'} =& \overline{B_{n-1}F} = \overline{B_{n-1}C_{n-1}} + \overline{C_{n-1}F}\\ =&(n-1)\overline{BC} + \overline{DC_{n-1}}\\ =&(n-1)\overline{BC} + \overline{BC} = n\overline{AC}。\end{aligned}$$

定理證畢。

(4) **Menelous 定理：** 設直線 ℓ 與 $\triangle ABC$ 三邊所在之直線 AB，BC 和 CA 分別相交於 P, Q, R（相異）三點，則下述有向長度比乘積條件式恆成立：

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = -1。$$

（Menelous 逆定理亦成立。證明留作習題。）

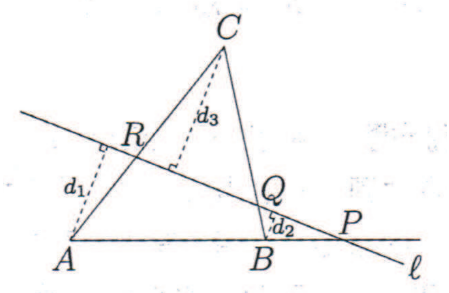


Figure 2.16:

證明： 令 d_1, d_2, d_3 分別是頂點 A, B, C 到直線 ℓ 之垂直距離，則由相似三角形定理可得

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = -\frac{d_1}{d_2}，\qquad \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} = \frac{d_2}{d_3}，\qquad \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = \frac{d_3}{d_1}，$$

所以

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = -1。$$

(5) **Ceva 定理：** 設 O 為 $\triangle ABC$ 內部一點，P, Q, R 分別為 AB 與 CO，BC 與 AO，CA 與 BO 之交點，則下述有向長度比乘積條件式恆成立：

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = 1。$$

（Ceva 逆定理亦成立。證明留作習題。）

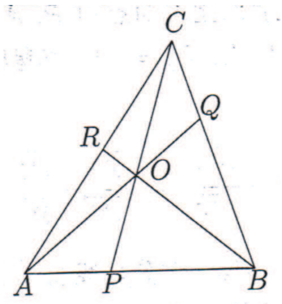


Figure 2.17:

證明： 令 $\triangle OBC, \triangle OCA, \triangle OAB$ 的面積分別為 $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$。因為 $\triangle CAP$ 與 $\triangle CPB$ 同高，所以其面積之比等於其底邊邊長之比，即

$$\frac{S_{\triangle CAP}}{S_{\triangle CPB}} = \frac{\overrightarrow{AP}}{oraPB}。$$

同理

$$\frac{S_{\triangle OAP}}{S_{\triangle OPB}} = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}。$$

所以

$$\frac{\triangle_2}{\triangle_1} = \frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle OBC}} = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}。$$

類似地可得

$$\frac{\triangle_3}{\triangle_2} = \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}, \qquad \frac{\triangle_1}{\triangle_3} = \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}。$$

【定義】 在直線上之四點列 P, A, P', B 稱之為**調和點列**，記以 $(PP'; AB) = -1$，若滿足下述有向長度比的條件式：

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = -\frac{\overrightarrow{P'A}}{\overrightarrow{P'B}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'A}} = -1，$$

即 P, P' 兩點以同等比例分割線段 $\overline{AB}$（一在外、一在內，如圖 2.18 所示）。

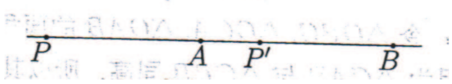


Figure 2.18:

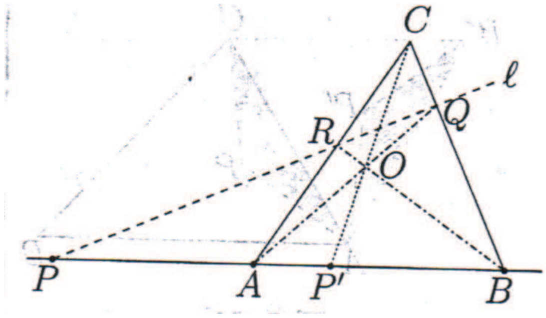


Figure 2.19:

【作法】 用已給線段 $\overline{AB}$ 為一邊，任選線外一點 C 構作三角形 $\triangle ABC$。過 P 點作任意的直線 ℓ，使得 ℓ 與 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$ 分別交於 Q, R 兩點。連結 AQ, BR，設兩者相交於 O 點，則 CO 與 $\overline{AB}$ 就會交於所求作之 P' 點。

證明： 直接運用 Menelous 定理和 Ceva 定理！

$$\text{Menelous 定理：}\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}=-1\text{；}$$

$$\text{Ceva 定理：}\frac{\overrightarrow{AP'}}{\overrightarrow{P'B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}=1\text{。}$$

兩式相除即得所需的有向長度比例式。

【註】 上述作備法說明了調和點到乃是在射影之下不變的性質，調和點列和一般的交義比在射影幾何中扮演著基本不變量的要角。

(5) **Steiner 點：** 設 $\triangle ABC$ 的三內角皆小於 $120°$（即小於 $2\pi/3$），則

$$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$$

有一個唯一的極小值，其解點 P_0 是使得

$$\angle AP_0B=\angle BP_0C=\angle CP_0A=120°$$

的點。

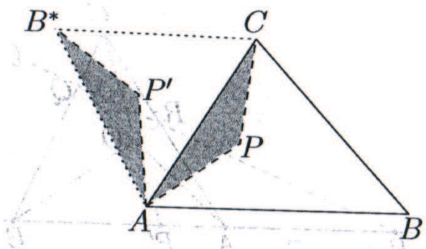


Figure 2.20:

如圖 2.20 所示，作 B^* 使得 $\triangle ACB^*$ 為等邊三角形。設 P 是平面上任給一點，令 $\triangle AP'B^*$ 為 $\triangle APC$ 繞 A 點旋轉 $60°$ 之所得者，則有 $\triangle APP'$ 為等邊三角形，而且

$$\overline{CP}+\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{B^*P'}+\overline{P'P}+\overline{PB}\text{。}$$

由此可見，上述總長在 P，P^* 皆位於 $\overline{BB^*}$ 之上為極小。類似地定義 A^* 和 C^* 點，則 P_0 應該就是 $\overline{AA^*}, \overline{BB^*}, \overline{CC^*}$ 的共交點，而所求證者則顯然而易見了。

【習題】

1. 以矩形面積公式為基礎，試證：平行四邊形面積 = 底乘高。
2. 試證三角形面積公式為 $S(\triangle) = \frac{1}{2}bh$。
3. 試證平行線的截割保持線段之比；即如圖 2.21 所示，求證：當 $AB//A'B'//A"B"$，則
$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'A"}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'B"}}。$$

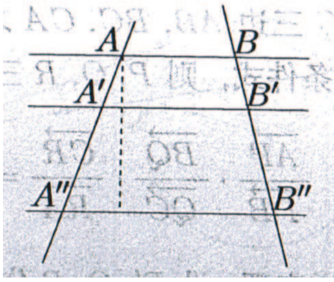


Figure 2.21:

4. 如圖 ?? 所示,AD 乃是 $\angle A$ 的角平分線。試證
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}。$$

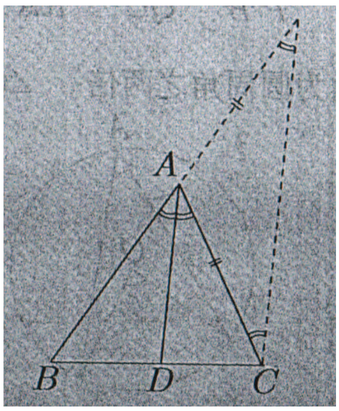


Figure 2.22:

5. 試將一個給定線段 $\overline{AB}$ 等分為 n 段,n 為某一正整數。
6. 試證明相似三角形定理在分數比的情形。

7. 試證 Menelous 逆定理：設（相異）三點 P, Q, R 分別在 $\triangle ABC$ 三邊 AB, BC, CA 之上並滿足下述有向長度比的條件式，則 P, Q, R 三點共線。

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PA}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = -1。$$

8. 試證 Ceva 逆定理：設 P', Q, R 分別為 $\triangle ABC$ 的三邊 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 上的三點並滿足下述有向長度比的條件式，則 CP', AQ, BR 三線共點。

$$\frac{\overrightarrow{AP'}}{\overrightarrow{P'B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = 1。$$

9. 試證圓心角為圓周角之兩倍：$\angle O = 2\angle A$。

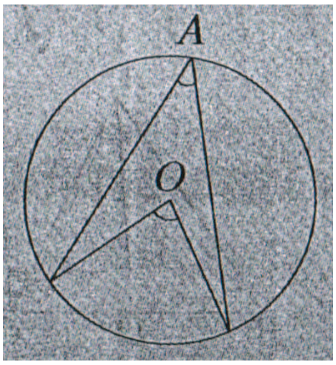


Figure 2.23:

10. 如圖 2.24 中，PQR 為一直線，PT 與圓相切於 T 點。試證：$\overline{PQ}\cdot\overline{PR} = \overline{PT}^2$。

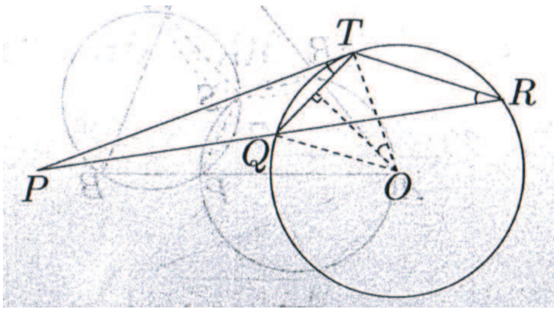


Figure 2.24:

11. 設 P, Q, R, S 為圓上四點，而 $\overline{PR}$ 與 $\overline{QS}$ 相交於圓內（或圓外）T 點。試證：$\overline{PT}\cdot\overline{TR} = \overline{QT}\cdot\overline{TS}$。

12. 試證 Miquel 定理：在 $\triangle ABC$ 的三邊 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 上分別取三點 P, Q, R，過 P, B, Q 及 P, R, A 分別作圓，令兩圓交點為 S（與 P），則 S, Q, C, R 四點共圓。

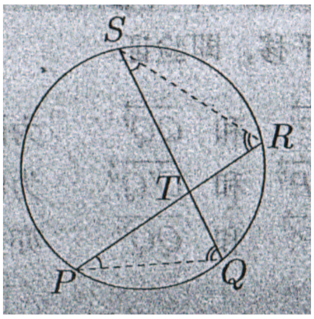


Figure 2.25:

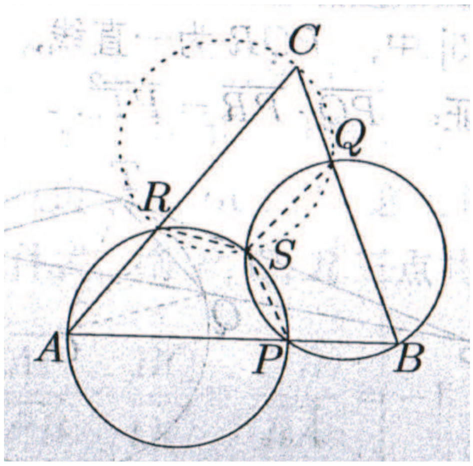


Figure 2.26:

13. 若平面中的一個變換 τ 滿足條件

$$\overrightarrow{P\tau(P)} \text{ 和 } \overrightarrow{Q\tau Q} \quad \text{恆為同向平行且等長，}$$

則稱 τ 為平面上一個**平移**（Translation），試證平移的複合仍是平移，即驗證

若	$\overrightarrow{PP'}$	和	$\overrightarrow{QQ'}$	為同向平行且等長，
和	$\overrightarrow{P'P''}$	和	$\overrightarrow{Q'Q''}$	為同向平行且等長；
則必有	$\overrightarrow{PP''}$	和	$\overrightarrow{QQ''}$	亦為同向平行且等長。

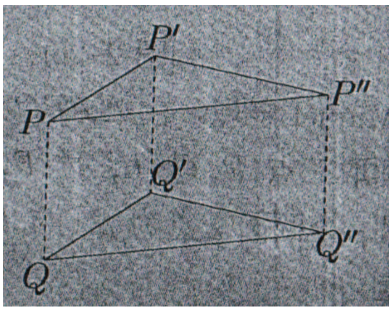


Figure 2.27:

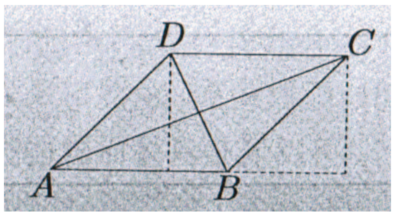


Figure 2.28:

14. 試證廣義勾股定理：設 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 為平行等長，則：

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 \text{。}$$

Chapter 3

平行性與連續性的認知與幾何基礎論的奠定：理性文明第一個輝煌的里程碑

3.1 Eudoxus 的逼近法、逼近原理與幾何基礎論的震後重建

Hippasus 的偉大發現：不可公度線段的存在，例如一個正五邊形（或正方形）的邊長和其對角線長等之，對於理性文明，有如發現了連續世界這個天衣無縫的新大陸！但是對於當年全希臘（特別是畢氏學派）引以自豪的「定量幾何基礎初論」來說，則是天搖地動的幾何學巨震（Geoquake）；它事實勝於雄辯地否定了整個初論的**頭號公設**——「可公度性的普遍成立」。原來基礎初論是建築在一個根本謬誤的公設之上。此事焉得不讓全希臘幾個學甲驚恐莫名，羞愧難當！？

其實，不可公度性的存在，並不是全面否定了當年古希臘幾何學在定量幾何基礎論上的成就。它只是說原來以為已經完整無缺的證明其實只是在可公度的情形的證明，而在一般不可公度的情形，則尚有待補證！這個亟待補證的任務對於當年整個古希臘幾何學甲是一個嚴峻而且迫切的挑戰。大約經歷半個世紀的努力，才促使 Eudoxus 開創了影響無比深遠廣闊的逼近法和逼近原理而得以完美成功。可以這麼說，Eudoxus 的思想和方法提供了研究和理解 Hippasus 所發現的新大陸的基礎。

如今回顧，相信 Eudoxus 當年是從相似三角形定理的如何補證，促使他發明其逼近理論的。首先，當年用平行分割、歸納論證而得的相似三角形定理可以改述如下：

設 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三個對應角各別相等。而且有一對對應邊，如 $\overline{AB}$ 和 $\overline{A'B'}$ **可公度**，亦即存在整數使得 $\overline{AB} : \overline{A'B'} = m : n$，則其他兩對對應邊也必然是可公度，而且有相等之比，即有

$$\overline{BC} : \overline{B'C'} = \overline{AC} : \overline{A'C'} = m : n。$$

如何才能把上述希臘幾何學界引以自豪的重要定理補證得在三對對應邊皆為不可公度的情形依然成立呢？這也就是當年希臘幾何學界苦思不得其解的問題，而 Eudoxus 在這方面的突破性想法起始於下述「頓悟」：當 $\{a, b\}$ 不可公度時，“$a : b$” 不是一個分數。其實，它乃是一種有待理解的新奐事物，不管你如何命名，反正是一種當時尚未了解有待研究的「新量」。例如 “$a : b$” 和 “$a' : b'$” 是兩對不可公度的直線段，Eudoxus 認識到 “$a : b$” 和 “$a' : b'$” 這兩個「新量」之間的大小或相等關係都還有待定義！但是

當 $\{a,b\}$ 不可公度而 $\{a',b'\}$ 可公度的情形下：

$$a:b \quad \text{和} \quad a':b'=\frac{m}{n}\text{。}$$

它們之間的大小關係卻又是相當清楚的，即：

$$a:b\begin{cases} >\dfrac{m}{n}\text{，} \\ <\dfrac{m}{n}\text{；}\end{cases} \iff \begin{cases} = a \text{ 比 } \dfrac{m}{n} \text{ 長，}\cdot b \\ a \text{ 比 } \dfrac{m}{n}\cdot b \text{ 短；}\end{cases} \iff \begin{cases} n\cdot a > m\cdot b\text{，} \\ n\cdot a < m\cdot b\text{。}\end{cases}$$

這也就是 Eudoxus 在研究這種「新量」時第一個認識到的：

Eudoxus 比較原則：

$$a:b\begin{cases} >\dfrac{m}{n}\text{，} \\ <\dfrac{m}{n}\end{cases} \quad \text{的充要條件就是} \quad \begin{cases} n\cdot a > m\cdot b\text{，} \\ n\cdot a < m\cdot b\text{。}\end{cases}$$

即 $a:b$ 和 m/n 的比較大小可以由 $n\cdot a$ 和 $m\cdot b$ 之間比較長短而判定之。而後者是極為初等而且其幾何意義是一目了然的。

在 $\{a:b\}$ 和 $\{a':b'\}$ 都是不可公度的情形，若有分數 m/n，使得

$$a:b>\frac{m}{n}>a':b'\text{，即“} na>mb \text{ 但是 } na'<mb' \text{”，}$$

則顯然應該定義前者大於後者。反之，若有分數 m/n，使得 $a:b<m/n<a':b'$，則應該定義前者小於後者。

再者，假如這種間於 $a:b$ 和 $a':b'$ 之間的分數是不存在的情形，即對於任何分數 m/n，$a:b$ 和 $a':b'$ 與 m/n 之間的大小關係總是同步同樣的，理當就可以作為“$a:b=a':b'$” 的定義。

這也就是 Eudoxus 當年對於兩個不可公度的比值之間的大、小及相等關係的定義，即

【定義】

$$a:b>a':b' \iff \text{存在分數 } \frac{m}{n}\text{，} a:b>\frac{m}{n}>a':b'\text{；}$$

$$a:b<a':b' \iff \text{存在分數 } \frac{m}{n}\text{，} a:b<\frac{m}{n}<a':b'\text{。}$$

$$a:b=a':b' \iff \text{對於任何分數 } \frac{m}{n} \text{ 皆有相同的大小關係。即：}$$

$$na\left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\}mb \iff na'\left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\}mb'\text{。}$$

為了論證上述定義的必然性，Eudoxus 開創了影響極為深遠的**逼近法**（Method of Approximation）。首先，他提出下述直觀上極為明顯的「公設」作為其論證的依據：

任給兩個直線段 a,b，不論前者有多短或後者有多長，總有足夠大的整數 N，使得 $N\cdot a$ 比 b 長。

定理 3.1 設 $\{a,b\}$ 是不可公度者，對於任給正整數 n，恆存在 m，使得

$$\frac{m}{n} < a : b < \frac{m+1}{n}\text{。}$$

證明

由上述公設，必有足夠大的 N，使得 $\frac{1}{n}b$ 的 N 倍要比 a 長。令 $m+1$ 為這種 N 之中的最小者，則有

$$m\left(\frac{1}{n}b\right) < a < (m+1)\left(\frac{1}{n}b\right)\text{，}$$

即

$$\frac{m}{n} < a : b < \frac{m+1}{n}\text{。}$$

【註】　因為 n 是可以任意大的，所以上述左、右夾逼 $a : b$ 的兩個分數之間的差額 $1/n$ 是可以小到任意小的。（用現代的術語，即對於任給正數 $\epsilon > 0$，皆有足夠大的 n，使得 $1/n < \epsilon$。）所以 $a : b$ 和 m/n 或 $(m+1)/n$ 之間的差別當然也可以小到任意小。基於上述定理，就可以進一步說明前述不可公度的「比值」之間大、小、相等關係的定義的必然性。

設 $a : b$ 和 $a' : b'$ 對於任給分數恆具有相同的大小關係，則對於任給 n，都有相應的 m，使得

$$\frac{m}{n} < a : b, \qquad a' : b' < \frac{m+1}{n}\text{。}$$

因此 $a : b$ 和 $a' : b'$ 之間的差別要比所有 $1/n$ 都小。不論上述差別是那一種新量，它是一個固定的量而它又比所有 $1/n$ 都小，所以唯一的可能者就是零，即 $a : b = a' : b'$。再者，在 $a : b$ 和 $a' : b'$ 不等的情形，則有一個分數，它和兩者的大小關係是不同的，這也就是前述比較大小的定義。

有了上述思想和逼近法，再進而重建當年希臘的定量幾何學，乃是順理成章之事，其要點在於原先僅僅對於可公度的情形具有證明的各種各樣定理和公式，作出其在不可公度的情形的「補證」。

3.1.1　相似三角形定理的補證

設 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三對對應角皆相等。我們不妨設 $\angle A$ 和 $\angle A'$ 相疊合，亦即如圖 3.1 所示，$\overline{BC} // \overline{B'C'}$ 而且 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AB}'$ 不可公度。設 m/n 及 p/q 分別是任給小於及大於 $\overline{AB} : \overline{AB}'$ 的分數。我們所要證明者就是他們也必然分別小於及大於 $\overline{AC} : \overline{AC}'$ 和 $\overline{BC} : \overline{B'C'}$。如圖 3.1 所示，在 AB 線上取 B^* 和 $\widehat{B}$ 使得 $\overline{AB^*} = \frac{m}{n}\overline{AB}'$，$\overline{A\widehat{B}} = \frac{p}{q}\overline{AB'}$。再者，過 $B*$ 和 $\widehat{B}$ 點分別作 $\overline{BC}$ 的平行線，交 AC 於 C^* 和 $\widehat{C}$。亦即 $\triangle AB^*C^*$ 和 $\triangle A\widehat{B}\widehat{C}$ 分別和 $\triangle AB'C'$ 相似（具有相同對應角）。由業已證明的可

公度情形，即有

$$
\begin{aligned}
&\overline{AC^*} : \overline{AC'} = \frac{m}{n}, \qquad && \overline{A\widehat{C}} : \overline{AC'} = \frac{p}{q}, \\
&\overline{B^*C^*} : \overline{B'C'} = \frac{m}{n}, \qquad && \overline{\widehat{B}\widehat{C}} : \overline{B'C'} = \frac{p}{q}, \\
\Longrightarrow \quad & \frac{m}{n} = \left\{ \frac{\overline{AC^*} : \overline{AC'}}{\overline{B^*C^*} : \overline{B'C'}} \right\} < \left\{ \frac{\overline{AC} : \overline{AC'}}{\overline{BC} : \overline{B'C'}} \right\} < \left\{ \frac{\overline{A\widehat{C}} : \overline{AC'}}{\overline{\widehat{B}\widehat{C}} : \overline{B'C'}} \right\} = \frac{p}{q}\text{。}
\end{aligned}
$$

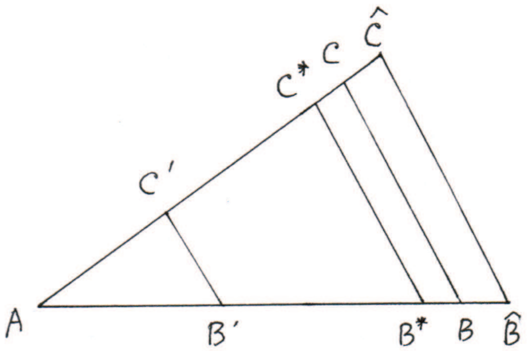


Figure 3.1:

再者，例如下述矩形公式

$$\square(a,b) : \square(u,u) = (a:u)(b:u)\text{。}$$

在 $a:u$ 和 $b:u$ 都是分數時已經證明，而在 $a:u$ 和 $b:u$ 至少有一個不是分數（即不可公度）時，需要補證。Eudoxus 對於上述矩形面積公式所作的補證，大致如下：

對於任給正整數 n，不論它有多大，皆有 m 和 m'，使得

$$\frac{m}{n} < a:u < \frac{m+1}{n}, \qquad \frac{m'}{b} < b:u < \frac{m'+1}{n},$$

即

$$\frac{m}{n}u < a\frac{m+1}{n}u, \qquad \frac{m'}{n}u < b < \frac{m'+1}{n}u\text{。}$$

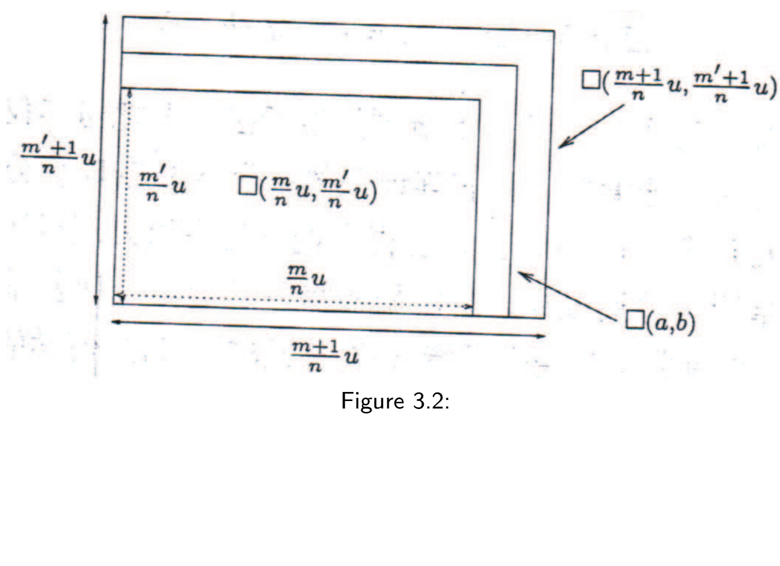


Figure 3.2:

如圖 3.2 所示，$\square(a,b)$ 包含 $\square(\frac{m}{n}u, \frac{m'}{n}u)$，而且它又包含於 $\square(\frac{m+1}{n}u, \frac{m'+1}{n}u)$ 之中，由此可得

$$\frac{mm'}{n^2} < \square(a,b) : \square(u,u) < \frac{(m+1)(m'+1)}{n^2}\text{。}$$

再者，由前述不等式的相乘，也有

$$\frac{mm'}{n^2} < (a:u)(b:u) < \frac{(m+1)(m'+1)}{n^2}\text{，}$$

因此，$\square(a,b) : \square(u,u)$ 和 $(a:u)(b:u)$ 之間的差別（假如有的話）必然要比同時左、右夾逼兩者的兩個分數之間的差別要更小，即小於

$$\frac{(m+1)(m'+1)}{n^2} - \frac{mm'}{n^2} = \frac{m+m'+1}{n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{m}{n} + \frac{m'+1}{n}\right)\text{。}$$

在 n 無限增大時，它是可以小到任意小的。所以 $\square(a,b) : \square(u,u)$ 和 $(a:u)(b:u)$ 之間不可能有任何差別，即為所要補證的矩形面積公式

$$\square(a,b) : \square(u,u) = (a:u)(b:u)\text{。}$$

長話短說，Eudoxus 所創的逼近法不但把當年僅僅在可公度的特殊情形下具有其證明的各種各樣定理的公式，加以明確簡潔的「補證」，使得它們不論在可公度或不可公度的情形皆普遍成立，從而徹底重建了定量幾何基礎論。再者，他有鑒於曾經採用錯誤的「公役」作為幾何學的論證依據的慘痛教訓，決心下功夫徹底檢查當代的幾何學，盡其所知所能把其論證的依據，精簡壓縮到「至精至簡」；流傳至今的《歐氏幾個學》（*Euclidean Geometry*）其中絕大部分來自 Eudoxus 的著作，所以「公理化」治學的典範和人類理性文明中的第一科學的初步成熟其實是 Eudoxus（而並非 Euclid）的偉大貢獻。不僅如此，Eudoxus 的逼近原理和方法論不但重建了定量幾何基礎論，而且也是分析學（Analysis）的發祥地和基本方法。他本人就把它用來證明錐體體積等於三分之一底面積乘高這個立體幾何基本公式，他的證法以及隨後 Archimedes 把它拓展到球面面積公式和球體體積公式的論證乃是積分學的雛型和範例。

3.2 平行性與連續性的認知與定量幾何基礎論

概括地來說，連結和分隔是空間（或平面）基本結構的描述，如兩點定一直段，線上一點把直線分隔為兩個半線，平面中心給定直線把平面分隔成兩個平面等之；而空間的基本性質則可以總結成下述三點，即

(i) 對稱性；例如平面對於任給直線，及空間對於任給平面的反射對稱性；

(ii) 平行性；亦即任給三角形的內角和恆等於平角；

(iii) 連續性：一條直線是連續不斷的，但是一剪就斷，亦即略去其中一點，就把直線分割分兩個不連通的半線。

總結前述三講的研討，在第一講的定性幾何中，我們有意識地只用對稱性，亦即只用 S.A.S.、等腰三角形、S.S.S.。我們比當年古希臘幾何學多證了定理 3 和 4，認識到三角形的內角和只有**恆等於**及**恆小於平角**這樣兩種**選項**。在第二講開始進而研討定量平面幾何，其中主要的基本定理是矩形和三角形面積公式，勾股定理（亦即畢氏定理）和相似三角形定理，其實它們在巴比倫、埃及和中國古代都已經是知而且用的實驗性公式。在中國古算中還認識到它們都可以由矩形面積公式（亦即長×寬）明快簡潔地推導

而得。在古希臘的定量幾何基礎初論中，他們力求精準，要對於上述基本公式給以嚴格的論證，例如其中最為簡樸的矩形面積公式，當年唯一能看出、想到的是採用平行分割，對於 $\ell : u$ 和 $\omega : u$ 皆為可公度的情形的這種證法，如今由定理 3 和 4 來回顧，在三角形內角和恆小於平角的選項中，根本沒有矩形，所以在進而研討定量幾何時，自然得選用三角形內角和恆等於平角（亦即平行性）。再者，在 Hippasus 的偉大發現之前，一來根本不知道竟然會有不可公度的可能性，二來也只有可公度的情才會用平行分割去證明矩形公式。如今回顧反思，當年居然把「可公度性普遍成立」作為「頭號公設」從而建立「初論」，的確過於大膽，結果栽了一個大跟斗。幸好有 Eudoxus 臨危頓悟，創逼近論加以補證。古希臘幾何學經歷了 Hippasus 到 Eudoxus 的轉折與艱辛，終於脱胎換骨，成就輝煌，奠定了定量幾何學和往後的分析學的基石乃是理性文明史上第一個偉大的里程碑！

在此讓我們再作下列幾點剖析：

（一） 以後見之明來剖析，我們可以認識到平行性和連續性在定量幾何基礎論所扮演重要角色，在幾何學的演發上，也是一直到定量研討的層面，才得以深入認識對稱性、平行性和連續性這三個基本性質的各別內蘊和深層配合。再者，即使以後見之明，也很難想出比一路走來更加高明的途徑來論證矩形面積公式，亦即先用平行分割證明可公度的特殊情形，然後再用逼近原理證明一般不可公度情形的推廣。其實是：捨此別無他途！

（二） **平行性**的深切理解，其實要在歐氏和非歐這兩種幾何的比較分析才可以充分體現（參看第七卷）。矩形在絶對幾何中的推廣是那種兩對對邊以及兩條對角線皆**各別等長**的四邊形。它們的面積公式也是基本重要的精要所在；但是要比歐氏幾何中的長×寬要複雜難用。

（三） 空間的**連續性**的直觀內涵就是直線連續不斷，但是一剪就斷。但是它的精微內蘊，卻要通過 Eudoxus 的逼近理論才能得窺其真諦，形象地可以這麼説：「連續世界有如無縫天衣，而 Eudoxus 在重建幾何基礎論所創的逼近理論，則是我們認知連續性之美妙的康莊大道。在這方面，師法大師就是師法 Eudoxus，這也就是我們在第三卷中要身體力行者。

（四） 作為本講的結句，讓我再對於中國古算和古希臘的定量平面幾何作一比較分析：兩者所得的基本公式大致相同，即矩形、三角形的面積公式，勾股弦公式（即畢氏定理）和相似三角形的邊長比例式，但是在基調和格局上則兩者是迥然不同。中國古代的工程師研究幾何是為了實用，是唯用是尚的；他們在基本測量公式的推導上善用面積，的確有其獨到的長處，但是在對於空間本質理解的深度上，相比於古希臘幾何學的確是落後了。究其原因，相信並非是在聰明才智上有任何差別，而是在格調、志趣和氣概上有所分野！例如可公度性是一個純理論性的問題；在實用的度量中，在力所能及的準確度之下的微量根本沒有其實質意義，所以不存在可不可公度這種問題，當然也不會有 Hippasus 這種深深觸及空間的連續性的發現和歷經半世紀的奮鬥才結晶而得出的 Eudoxus 逼近原理和方法論。由此反思，讀者應該體會到局限中國古代幾合的發展的因素是：「唯用是尚，則難見精深而所及不遠」，而古希臘幾何學上的成功給全人類的啓示與鼓舞則是：「若以理解大自然為志趣並能世代相承，精益求精，則宇宙基本結構的至精至簡，至善至美是可望可及的。」