從「+1」運算到指數函數、三角函數

項武義*

數學的基礎，歸根究底乃是建築在空間和數系這兩種基本結構之上的。在本質上，空間 (space) 就是我們和宇宙中的一切都共存于其中者，是大自然所賦予的；而數系 (number system) 則是人類理性文明為了更加精確地定量研討事物所構造的「計量」體系，所以是人的創造。在定量幾何學 (quantitative geometry) 定量地研討空間本質中，前者和後者自然地結合在一起，相輔相成。

最原始的數系就是我們用來數個數 (counting) 的自然數系 (system of natural numbers)，然後逐步擴充而得整數系 (system of integers)、分數系 (system of rational numbers)、實數系 (system of real numbers) 和複數系 (system of complex numbers)。通常分別以 $\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 表示上述數系，則上述逐步擴充（張）(extensions) 即可以

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

簡約地表達之。

本文的中心課題就是要對上述逐步擴張而構造的一連串數系作一次歸本究源的結構分析。唯有對數系結構的來龍去脈瞭然于心，才能在運用它們作各種各樣定量分析、探索自然時得心應手。

1 自然數系

自然數系是人類為了數個數 (counting) 這樣一種原始而且基本的「定量化」而創造的體系。例如有一位牧羊人要知道其羊群的個數，或當你發現月亮的圓缺變化是一種週而復始的事情，自然想統計一下

*香港科技大學數學系

其週期的天數等等。雖然各古文明所用的符號和體系不同，但是其本質都是一串逐一相連的符號體系，例如

$$\begin{array}{ccccc} | & || & ||| & |||| & \cdots \\ 一 & 二 & 三 & 四 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array}$$

其中第一個符號表示「單元」，是一隻羊，一個人，一棵樹的抽象化，而後繼符號則表示比前述所表達者更加多一個，亦即

$$\begin{array}{l} 2 = 1 + 1,\ 3 = 2 + 1,\ 4 = 3 + 1,\ 5 = 4 + 1,\ \cdots \\ ,101 = 100 + 1,\ 102 = 101 + 1,\ \cdots \end{array}$$

由此可見，自然數系最為原始、基本的結構就是「$+1$」運算。在自然數系這一串順序排列的符號體系中，後繼者就是前者「$+1$」所得，而且任何一個自然數都可以由 1 起始，逐步「$+1$」而得之。

把上述事實改用「數學化」的集合用語來描述，即為

【數學歸納法原理】(Principle of mathematical induction)：自然數系 $\mathbb{N}$ 的一個子集 $\mathcal{S}$，若滿足條件

$$1 \in \mathcal{S}, \quad n \in \mathcal{S} \Rightarrow n + 1 \in \mathcal{S}$$

則 $\mathcal{S}$ 必須等于 $\mathbb{N}$。

自然數系之所以有用、好用是因為它具有滿足交換律、結合律和分配律的加法和乘法運算，這都是大家所熟知常用者。假如有人問你或者你自問：「為什麼那些運算律總是成立的呢？」此問顯然不能用「實例的計算從來沒碰到不成立的情形，所以應該是成立的」或者是人云亦云地「大家（或老師）都說它們總是成立的，所以我也相信它們是對的」作為解釋，因為自然數的個數是無限的，而實例計算所能驗算者只是很小的一部份。所以加、乘運算的運算律的普遍成立是需要加以論証的！這也就是我們所要討論的第一個課題。此事當然得從「加法」和「乘法」的根源（亦即本質）說起：加法的本質乃是「$+1$」運算的複合。例如「$+2$」就是把「$+1$」做兩次的結果，「$+3$」就是把「$+1$」做三次的結果，「$+(n+1)$」就是比「$+n$」再多做一次「$+1$」者也。由此可見

$$a + (n + 1) = (a + n) + 1$$

其實就是加法的歸納定義式。再者<u>加法結合律</u>：

$$(a+m)+n=a+(m+n)$$

由上述加法的本質來看，即對 a 先作 m 次「$+1$」然後接著再作 n 次「$+1$」，其結果也就是對 a 作 $(m+n)$ 次「$+1$」，由此可見加法結合律的普遍成立是直觀明顯的。把它改用數學化的用語與格式說清楚，則是下述歸納論証 (Proof by induction)。

【定理一】（加法結合律）：$(a+m)+n=a+(m+n)$。

<u>証明</u>：對于任給 a, m，歸納証明上式對于所有自然數 n 皆成立。

(i) $n=1$ 時，$(a+m)+1=a+(m+1)$ 就是加法的歸納定義式。

(ii) 歸納假設 $(a+m)+n=a+(m+n)$，則有

$$\begin{aligned}(a+m)+(n+1) &= \big[(a+m)+n\big]+1 && [\text{(i)}]\\ &= \big[a+(m+n)\big]+1 && [\text{歸納假設}]\\ &= a+\big[(m+n)+1\big] && [\text{(i)}]\\ &= a+\big[m+(n+1)\big] && [\text{(i)}]\end{aligned}$$

接著讓我們再用歸納法來証明加法交換律。

【定理二】（加法交換律）：$a+b=b+a$。

<u>証明</u>：先用歸納法証明 $a+1=1+a$。

(i) $a=1$ 時，$1+1=1+1$ 是顯然的。

(ii) 歸納地設 $a+1=1+a$，則有

$$\begin{aligned}(a+1)+1 &= (1+a)+1 && [\text{歸納假設}]\\ &= 1+(a+1) && [\text{結合律}]\end{aligned}$$

(iii) 再由歸納假設 $a+b=b+a$ 証明

$$a+(b+1)=(b+1)+a$$

其証明如下：

$$
\begin{aligned}
a+(b+1) &= (a+b)+1 && [\text{結合律}] \\
&= (b+a)+1 && [\text{歸納假設}] \\
&= b+(a+1) && [\text{結合律}] \\
&= b+(1+a) = (b+1)+a
\end{aligned}
$$

現在再來分析一下乘法的本質和定義式：$1 \cdot a = a$, $m \cdot a$ 就是 m 個 a 自相加的總和。所以 $(m+1) \cdot a$ 就是比 $m \cdot a$ 再多加一個 a。由此可見乘法的歸納定義式就是

$$1 \cdot a, \quad (m+1) \cdot a = m \cdot a + a = m \cdot a + 1 \cdot a$$

再者，乘法左分配律：

$$m \cdot a + n \cdot a = (m+n) \cdot a$$

其實就是說把 m 個 a 自相加和 n 個 a 自相加的「和」再加起來，也就是 $(m+n)$ 個 a 自相加的總和。為了嚴謹起見，再給它一次歸納的証明。

【定理三】（左分配律）：$m \cdot a + n \cdot a = (m+n) \cdot a$。

証明：對于任給 m, a，歸納証明上式對于所有自然數 n 皆成立。

(i) $n = 1$ 時，由定義知 $m \cdot a + 1 \cdot a = (m+1) \cdot a$。

(ii) 歸納地設 $m \cdot a + n \cdot a = (m+n) \cdot a$，則有

$$
\begin{aligned}
m \cdot a + (n+1) \cdot a &= m \cdot a + (n \cdot a + a) && [\text{定義}] \\
&= (m \cdot a + n \cdot a) + a && [\text{加法結合律}] \\
&= (m+n) \cdot a + a && [\text{歸納假設}] \\
&= \big[(m+n)+1\big] \cdot a && [\text{定義}] \\
&= \big[m+(n+1)\big] \cdot a
\end{aligned}
$$

[注意]：在尚未証明乘法交換律之前，分配律是有左、右之分別的。其實，乘法交換律的証明是要在左、右分配律都証得之後才能証得者。

【定理四】（右分配律）：$m \cdot (a+b) = m \cdot a + m \cdot b$。

証明：任取 a, b，對 m 作歸納証明如下：

(i) $m=1$ 時是顯然成立的。

(ii) 歸納地設 $m\cdot(a+b)=m\cdot a+m\cdot b$ 成立，則

$$\begin{aligned}(m+1)\cdot(a+b) &= m\cdot(a+b)+(a+b) && [\text{定義}]\\ &= (m\cdot a+m\cdot b)+(a+b) && [\text{歸納假設}]\\ &= (m\cdot a+a)+(m\cdot b+b) && [\text{加法的交換、結合律}]\\ &= (m+1)\cdot a+(m+1)\cdot b\end{aligned}$$

【定理五】（乘法交換律）：$a\cdot b=b\cdot a$。

【定理六】（乘法結合律）：$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$。

【習題】：

(1) 試用歸納法証明乘法交換律。

(2) 試用歸納法証明乘法結合律。

指數符號：$a^1=a$，$a^m\cdot a=a^{m+1}$（指數歸納定義式）。

(3) 試証指數定則 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$。

(4) 試証指數定則 $(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$。

(5) 試証指數定則 $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$。

2 整數數系

減法乃是加法的逆算：$(a-b)$ 就是那個加上 b 後等于 a 的唯一解，亦即方程式

$$x+b=a$$

的唯一解就是 $(a-b)$。但是在自然數系中，上述方程式只有在 a 大于 b 時才能「有解」！在此，一個自然而然的想法是：上式在 $a\leq b$ 時在自然數系中「無解」乃是由于自然數系的範疇太狹窄了。因此，可以把它作適當的擴充來消除這種不理想的缺陷。換句話說，我們由自然數

去構造一些新的數，使得在擴張後的數系中 $x+b=a$ 總是有唯一解。例如設

$$x+1=1$$

的解是一個新的數「0」，則由

$$0+n=n \Rightarrow 0+(n+1)=(0+n)+1=n+1$$

可見這個新數 0 滿足

$$0+a=a$$

再者，我們也需要引進

$$x+a=0$$

的解，以符號「$-a$」表之。由此易見在 $a>b$ 時，

$$x+b=a$$

的解是一個自然數 $(a-b)$，而在 $a<b$ 時

$$x+b=a$$

的解就是那個新數 $-(b-a)$，因為

$$\begin{aligned}-(b-a)+b &= -(b-a)+\big[(b-a)+a\big] \\ &= \big[-(b-a)+(b-a)\big]+a \\ &= 0+a=a\end{aligned}$$

總結上述簡短分析，可見一個包含自然數系的擴張數系，若要滿足同樣的加乘運算律，而且使得減法通行無阻，亦即 $x+b=a$ 對于任給 a,b 恆有解，則它至少包含一個「0」和每個自然數 a 的負數「$-a$」。這樣一個數系就是我們常用、好用的整數系：

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-a,\ a\in\mathbb{N}\}$$

當然，我們還得要適當地定義整數系中的加、乘和指數運算。在這個關鍵性的步驟上，定義的適當性的檢驗準則是在擴張的數系中依然保有各個運算律，因為那些運算律乃是數系有用、好用的根本所基。其實上述保有運算律的準則業已唯一地確定了整數系中加、乘、指數運算的適當定義的必然性。茲分析如下：

【分析】：

(1) $0+0=0$，$0+a=a$，$(-a)+a=0$ 則是「0」和「$-a$」的定義式。

(2) 對于任給自然數 a,b，

$$\begin{cases} (-a)+b=b+(-a)=b-a \\ (-a)+b=b+(-a)=-(a-b) \end{cases} \quad \text{若} \begin{cases} b>a \\ a>b \end{cases}$$

<u>上述定義之必然性</u>：

若 $b>a$，則

$$\begin{aligned} (-a)+b &= (-a)+\big[a+(b-a)\big] \\ &= \big[(-a)+a\big]+(b-a) \\ &= 0+(b-a)=b-a \end{aligned}$$

若 $a>b$ 則

$$\begin{aligned} \big[(-a)+b\big]+(a-b) &= (-a)+\big[b+(a-b)\big] \\ &= (-a)+a=0 \end{aligned}$$

所以 $(-a)+b=-(a-b)$。

(3) 對于任給自然數 a，皆有

$$0\cdot a=a\cdot 0=0, \quad (-1)\cdot a=a\cdot(-1)=-a$$

<u>上述定義之必然性</u>：

$$\begin{aligned} &0\cdot a=(0+0)\cdot a=0\cdot a+0\cdot a \Rightarrow 0\cdot a=0 \\ &0=0\cdot a=\big[1+(-1)\big]\cdot a=1\cdot a+(-1)\cdot a=a+(-1)\cdot a \\ &\Rightarrow (-1)\cdot a=-a \end{aligned}$$

[特例：$(-1)\cdot 1=1\cdot(-1)=-1$]

(4) $(-1)\cdot(-1)=1$

<u>定義之必然性</u>：

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)\cdot 0=(-1)\cdot\big[(-1)+1\big]=(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1 \\ &= (-1)\cdot(-1)+(-1) \quad \Rightarrow (-1)\cdot(-1)=1 \end{aligned}$$

(5) 符號定則：$(-a)\cdot b=-a\cdot b$, $(-a)(-b)=a\cdot b$

定義之必然性：

$$(-a)\cdot b=\big[(-1)\cdot a\big]b=(-1)\cdot(a\cdot b)=-a\cdot b$$
$$(-a)\cdot(-b)=\big[(-1)\cdot a\big]\big[(-1)\cdot b\big]=\big[(-1)(-1)\big](a\cdot b)=1\cdot(a\cdot b)=a\cdot b$$

總結上面幾點分析，可見我們業已熟習的整數系中的正、負數和 0 之間的計算法則，其實乃是能使得整數系的運算依然保持原先的那一套運算律的「唯一可能定義法」（必然性）。當然，我們還得去驗証這種唯一的可能定義法是真的能夠保有各個運算律的！這一點是很好的習題題材。

【習題】：逐一証明上述所定義的整數系的加乘運算滿足加、乘的交換律、結合律和分配律。

3 分數系（亦稱有理數系）

除法乃是乘法的逆算：$(a\div b)$ 就是那個乘以 b 後等于 a 的唯一解 $(b\neq 0)$，亦即方程式

$$x\cdot b=a,\quad (b\neq 0)$$

的唯一解定義為 $(a\div b)$。但是在整數系中，上述方程式只有在 b 是 a 的因數（亦即 a 是 b 的倍數）的情形才能「有解」。由此可見，整數系還得要加以適當的擴充才能消除這種不理想的「缺陷」。這也就是由整數系到分數系（亦稱有理數系）的擴張。

【定義】：對于整數 a 和 b $(b\neq 0)$ 定義分數「$\dfrac{a}{b}$」為方程式

$$x\cdot b=a$$

的唯一解；易見它也是 $x\cdot bk=ak$ 的解，所以 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{ak}{bk}$。

若 $ad=cb$，$b,d\neq 0$ 則 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{ad}{bd}=\dfrac{cb}{db}=\dfrac{c}{d}$，反之若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，亦即 $x\cdot b=a$ 和 $x\cdot d=c$ 具有同解，所以 $ad=x\cdot bd=(xd)b=cb$。由此可見「$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 的充要條件」是 $ad=cb$。

接著讓我們來分析一下分數之間的加法和乘法應該如何定義才能確保分數系的加、乘運算依然保有交換、結合和分配律。

(i) $$\left(\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}\right)\cdot bb' = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot bb' + \left(\frac{a'}{b'}\right)b'b = ab' + a'b$$

所以應該定義加法如下：

$$\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'} = \frac{ab'+a'b}{bb'} \quad (b, b' \neq 0)$$

(ii) $$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b'}\right)bb' = \left[\left(\frac{a}{b}\right)\cdot b\right]\left[\left(\frac{a'}{b'}\right)\cdot b'\right] = aa'$$

所以應該定義乘法如下：

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a'}{b'}\right) = \frac{aa'}{bb'} \quad (b, b' \neq 0)$$

採用上述分數的加法、乘法定義式和兩個分數的相等檢驗條件，就容易把分數系的加、乘運算律歸于整數系的加乘運算律來加以逐一驗証。[此事留作習題]

指數定義的推廣：設 a, b 是非零整數，則 $\left(\frac{a}{b}\right)^0$ 定義為 1，$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$ 定義為 $\left(\frac{b}{a}\right)^n$。

上述定義是使得指數定則在指數等于整數時恆成立的唯一定義法，即有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n} \qquad , m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n} \qquad , m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

4　實數系 (real number system)

在概念上和研討方法上，由有理數系到實數系是一個大幅度的躍進。在人類理性文明發展史上，這個躍進發生于紀元前五、四世紀古希臘幾何學家在定量幾何基礎理論的深入研究之中。長話短說，首先他們認識到長度乃是各種各樣幾何量之中最為原始基本者，所以長度的度量是研究定量幾何的起點和奠基之所在。在此，他們提出兩個直線段 a, b 可公度 (commensurable) 的概念：

【定義】：若存在一個公尺度 c 使得一對給定直線段 a, b 分別是它的整數倍，即 $a = m \cdot c, b = n \cdot c$，則稱兩者為可公度的，而兩者長度之比 $a : b$ 當然就可以定義為分數 $\frac{m}{n}$。即

$$a : b = \frac{m}{n} \Leftrightarrow \text{存在 } c \text{ 使得 } a = m \cdot c,\ b = n \cdot c$$

[註]：假如 m, n 是互素的，則 c 乃是 a, b 的公尺度之中的最長者。

當年他們還主觀地認為這種可公度性 (commensurability)「乃是」普遍成立于任何一對直線段之間的，並且以此為當年古希臘幾何學家所致力于其建立的定量幾何基礎論 (foundation of quantitative geometry) 的頭號公理 (Number One Axiom)。但是在畢氏 (Pythagoras) 死後不久，其門徒 Hippasus 卻發現並嚴格証明一個正五邊形的邊長和其對角線長是不可公度的！（隨後他也以同樣証法証明一個正方形的邊長和其對角線長也是不可公度的。）這個偉大的發現事實勝于雄辯地証明分數系是不足以處理長度的度量的！不可公度的直線段的長度的比值肯定不是一個分數！而當年希臘幾何學界所引以自豪的定量幾何基礎論中所有的基本定理（如相似三角形定理）和基本公式（如三角形面積公式、畢氏定理）都是植基于可公度性普遍成立這個錯誤的公理之上的，豈非全盤皆空!? 其實，此事並非全盤皆空，只是他們原先以為完整無缺的「普遍」情形的証明，其實乃是在所涉及的線段都是可公度的特殊情形的証明是也。而普遍、不可公度的情形尚有待補証！這個補証和全面重建定量幾何基礎論的任務在 Hippasus 因為他的偉大發現而被其惱羞成怒的同門所殺害之後約半個世紀，才由 Eudoxus 于以完成。這個長達半世紀的嚴峻挑戰促使 Eudoxus 開創一種嶄新的思路和方法，簡約言之，這就是用逼近法把實數系的研討歸于有理數系的研討 (method and principle of approximation)。上面所說的這一段古希臘定量幾何學發展史乃是整個人類理性文明發展史中的重大篇章和輝煌的里程碑，自然得另列專題詳加研討其本末來由和深遠的影響。在這裡我們只是從數系逐步擴張的觀點，把 Eudoxus 所創的逼近原理和方法，改用現代通用的術語把從有理數系到實數系的擴張的精要之點，作一簡樸明確的敘述。

1. 不可公度直線段的發現，事實勝于雄辯地証明了簡單、初等的有理數系是不足以表達任給兩個直線段之間的比值的；足以用來表達、研討長度的度量的數系肯定要包含許多許多那些不可公度的長度比值的非分數 (irrational numbers)。總之，它是一個比有理數系更大的數系——實數系。

2. Eudoxus 的逼近原理和逼近法明確了實數系和有理數系之間的關係，以及用有理數逼近非分數，從而研討實數系的有效途徑。茲簡述其精要如下：

(i) 比較原則：設 a, b 不可公度，則其比值 $a:b$ 是一個非比實數。它和一個分數 $\dfrac{m}{n}$ 之間的大、小比較原則是

$$a:b \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} \frac{m}{n} \Leftrightarrow \begin{cases} n\cdot a > m\cdot b \\ n\cdot a < m\cdot b \end{cases}$$

(ii) 逼近原理：對于任給非比實數的比值 $a:b$ 和任給正整數 n，皆有整數 m 使得

$$\frac{m}{n} < a:b < \frac{m+1}{n}$$

所以在 n 無限增大時，所給的非比實數可以用相差只有 $\frac{1}{n}$ 的分數左右夾逼，因此 $a:b$ 和其左、右夾逼的分數之間的差別是可以小到任意小的。

(iii) 兩個非比實數 $a:b$ 和 $c:d$ 相等的定義：

兩個不可公度的比值 $a:b$ 和 $c:d$ 相等的定義是兩者和所有分數都有相同的大、小關係，亦即

$$na \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} mb \Leftrightarrow nc \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} md$$

對所有自然數 m, n 皆成立。

[註]：若改用現代的數列術語來重述 (iii)，即為下述數列極限的唯一性

設 λ，λ' 是同介于兩個左、右夾逼數列 $\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$ 之間的實數，即

$$r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_n \leq r_{n+1} \leq \cdots \leq \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \lambda' \end{matrix} \right\} \leq \cdots \leq s_{n+1} \leq s_n \leq \cdots \leq s_2 \leq s_1$$

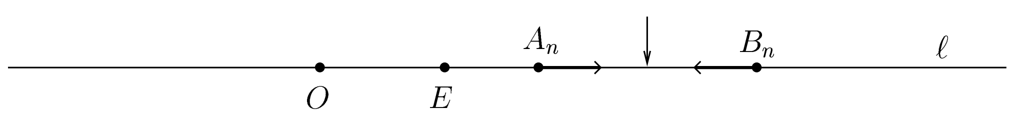
而且 $(s_n - r_n) \to 0$，則必有 $\lambda = \lambda'$。

3. 在當年 Eudoxus 所要研討的長度度量問題上，比值 $a : b$ 是「原給者」，對于每個 n，他証明存在由 $a : b$ 而定的 m 使得

$$r_n = \frac{m}{n} < a : b < \frac{m+1}{n} = s_n$$

從而構造得 $a : b$ 的一對左、右夾逼數列 $\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$，所以根本沒有「存不存在一個被它們所左、右夾逼的實數？」這種問題，因為它就是原給的「$a : b$」！

但是在近代數學中，特別是分析學，我們經常會用到以種種方式構造而得的數列，因而討論它們的極限的存在性問題就自然而然地成為很有其必要了。顯然任何論証，必要有所本，有所依據（証明是不可能無中生有的！）所以近代數學中各種各樣的存在性定理當然也必然有其所本。而其所本，歸根研底就是上述左、右夾逼數列的存在性：即對于兩個左、右夾逼數列 $\{r_n\} \to\leftarrow \{s_n\}$，恆存在有一個實數被兩者所夾逼；從實數在直線段長度度量的直觀內含來看，設直線 ℓ 上取定基點 O 和單位長線段 $\overline{OE}$，則線上的點 $A \in \ell$ 和實數 $a \in \mathbb{R}$



之間有一個一、一對應，即 $a = \overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OE}$ 是 $\overrightarrow{OA}$ 的有向長度。因此，對應于兩個左、右夾逼數列 $\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$ 就有兩個左、右夾逼的 ℓ 上的點列 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 使得 r_n, s_n 分別是 $\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n}$ 的有向長度。由此可見被 $\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$ 所左、右夾逼的那個實數 λ 所相應的點也就是直線 ℓ 上把 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 分割在它的兩側的那個分界點。

反之，假如這樣一個被 $\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$ 所左、右夾逼的實數不存在的話，其直觀內含（亦即幾何意義）就是直線 ℓ 上缺了這樣一個分界點。但是直線是連續不斷的；而去掉一點則把一條直線切為兩段。所以直線上不能有任何這種「缺了」分界點的情形其實就是直線乃是連續不斷的確切描述；而上述左、右夾逼數列的被夾逼的實數的存在性則是直線的連續性的解析描述 (the analytical description of the continuity of straight line)。[這也就是通常把上述存在性叫做實數系的連續性的原由。]

總結上面三點，實數系的發現和理解都和長度度量問題密切關聯，而實數系中任何一對左、右夾逼數列都存在有一個被它們所夾逼的實數（亦即它們的共同極限）則是直線連續不斷的解析描述，稱之為實數系的連續性，而它又是近代數學中各種各樣存在性定理（例如代數基本定理等等）的証明之所據。再者，實數系是有理數系的一種自然擴張，任何一個實數都能用一對左、右夾逼的分數數列去唯一地描述它；反之，任給一對左、右夾逼的分數數列也都描述著一個實數。這樣不但簡明扼要地刻劃了有理數系和實數系之間的關係，而且也提供了用有理數系去研討實數系的有效途徑和方法。

5 指數函數

【引理一】：設 a 是一個大于 1 的給定實數，n 是一個大于 1 的給定整數，則存在一個唯一的正實數 x_0，它的 n 次方等于 a，亦即方程式

$$x^n = a$$

具有唯一的正實根。

証明：先証唯一性。設 x_1, x_2 是兩個正實數，

$$x_1^n = a, \quad x_2^n = a$$

則必有 $x_1 = x_2$。假如不然，則有 $x_1 > x_2$ 或 $x_1 < x_2$。但是

$$\left.\begin{matrix} x_1 > x_2 \\ x_1 < x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1^n > x_2^n \\ x_1^n < x_2^n \end{matrix}\right.$$

是和所設 $x_1^n = x_2^n = a$ 相矛盾的。所以 x_1 必須等于 x_2。

再証存在性：若存在有一個正分數 $\frac{m}{p}$ 使得 $(\frac{m}{p})^n = \frac{m^n}{p^n} = a$，則不必再証。不然，則 x_0 就是那個小于所有其 n 次方大于 a 的正分數，而又大于所有其 n 次方小于 a 的正分數的唯一實數。 □

[上述唯一正實根叫做 a 的 n 方根。通常以 $\sqrt[n]{a}$ 表示之。]

【定義】：$a^{\frac{1}{n}}$ 定義為 $\sqrt[n]{a}$，亦即 $x^n = a$ 的唯一正實根。

$a^{\frac{m}{n}}$ 定義為 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$。

$a^{-\frac{m}{n}}$ 定義為 $\dfrac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$。

【習題】：

(i) 試証 $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$。

(ii) 設 a 是一個小于 1 的正實數。試証

$$x^n = a$$

的正實根唯一存在。

(iii) 試証 $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{(\frac{m}{n}+\frac{p}{q})}$。

(iv) 試証 $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$。

(v) 試証若 $a > 1, \frac{m}{n} > \frac{p}{q}$，則 $a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}$。

(vi) 試証若 $a > b$，則 $a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}$。

【引理二】：設 $a > 1$，$\varepsilon > 0$ 是一個任給正分數。則存在有足夠大的 n 使得 $\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$。

証明：取 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}(a-1)$，則有 $(1+\varepsilon)^n > 1+n\varepsilon > a$，所以 $\sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon$。

□

【推論】：設 $a>1$，而且 $\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$ 是一對左、右夾逼正分數列，即

$$0<r_1\leq r_2\leq\cdots\leq r_n\leq r_{n+1}\leq\cdots\leq s_{n+1}\leq s_n\leq\cdots\leq s_2\leq s_1$$

而且 $(s_n-r_n)\to 0$（亦即可以小到任意小），則 $\{a^{r_n}\}$ 和 $\{a^{s_n}\}$ 也是一對左、右夾逼數列。

<u>証明</u>：由 $a>1$ 和 $\frac{m}{n}>\frac{p}{q}\Rightarrow a^{\frac{m}{n}}>a^{\frac{p}{q}}$ 可見 $\{a^{r_n}\}$ 是遞增的而 $\{a^{s_n}\}$ 則是遞減的。所以唯一還需要驗証者乃是

$$\left(a^{s_n}-a^{r_n}\right)\quad \text{可以小到任意小。}$$

茲証之如下：

設 $\varepsilon>0$ 是任給正分數，另取一個正分數 $\varepsilon'>0$ 使得 $a^{s_1}\cdot\varepsilon'<\varepsilon$。由引理二即有一個足夠大的 N，使得

$$a^{\frac{1}{N}}<1+\varepsilon'$$

再者，由所設 $(s_n-r_n)\to 0$，即有足夠大的 n 使得 $(s_n-r_n)<\dfrac{1}{N}$。由此即得

$$\begin{aligned}a^{s_n}-a^{r_n}&=a^{r_n}\left(a^{(s_n-r_n)}-1\right)\\&<a^{s_1}\cdot\left(a^{\frac{1}{N}}-1\right)\\&<a^{s_1}\cdot\varepsilon'<\varepsilon\end{aligned}\qquad\square$$

【定義】：設 $a>1$，λ 是一個給定正實數，$\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$ 是 λ 的一對左、右夾逼正分數數列。則定義 a^{λ} 為左、右夾逼數列 $\{a^{r_n}\}$ 和 $\{a^{s_n}\}$ 所夾逼的那個正實數。

<u>定義之合理性</u>：我們必須驗証上述定義和 λ 的左、右夾逼正分數列的選取無關，唯有這樣，上述定義才是合理的。為此，設 $\{r'_n\}$ 和 $\{s'_n\}$ 是另一 λ 的左、右夾逼正分數數列，則有

$$\{r_n\}\text{ 和 }\{s'_n\}\quad\text{以及}\quad\{r'_n\}\text{ 和 }\{s_n\}$$

也都是 λ 的左、右夾逼數列。所以

$$\{a^{r_n}\}\text{ 和 }\{a^{s'_n}\}\quad\text{以及}\quad\{a^{r'_n}\}\text{ 和 }\{a^{s_n}\}$$

也都是左、右夾逼數列。因此

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s'_n}$$
$$\lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}$$

由此可見上述四個極限都相等。所以定義它們的共同極限為 a^λ 是完全合理且自然的！

【定義】：$a^{-\lambda}$ 定義為 $\dfrac{1}{a^\lambda}$。

總結上面由一個給定 $a>1$ 的整數指數到它的分數指數然後再到它的實數指數的逐步推廣，所用到基本上就是實數系的連續性，和分數指數的單調性和夾逼性，亦即

$$\frac{m}{n} > \frac{p}{q} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}$$
$$(s_n - r_n) \to 0 \Rightarrow (a^{s_n} - a^{r_n}) \to 0$$

再者，把 $x \mapsto a^x$ 想成一個實變數 x 的函數，亦即定義 $f(x)=a^x$，稱之為<u>以 a 為底的指數函數</u> (the exponential function with a as the base)。

【定理六】：指數函數 $f(x)=a^x, (a>1)$ 滿足下述性質：

(i) $f(x_1+x_2) = f(x_1)\cdot f(x_2)$。

(ii) $f(x)$ 是 x 的（真，或嚴格）單調遞增函數 (strictly monotonic-increasing function)。

[証明留作習題]

【定理七】：設有實數函數 $f(x)$ 滿足上述兩點，則 $f(x)=\big[f(1)\big]^x$。

<u>証明</u>：由 (i) 即得

$$f(x) = f(0+x) = f(0)\cdot f(x) \Rightarrow f(0) = 1$$

再由 (ii) 即有 $f(1) > f(0) = 1$。令 $a = f(1)$。再用 (i) 即有 $f(\frac{1}{n}) > f(0) = 1$，而且有

$$\begin{aligned}
&\left[f(\frac{1}{n})\right]^n = f(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}) = f(1) = a \\
\Rightarrow\ & f(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \\
\Rightarrow\ & f(\frac{m}{n}) = \left[f(\frac{1}{n})\right]^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} \\
& f(-\frac{m}{n}) \cdot f(\frac{m}{n}) = f(0) = 1 \\
\Rightarrow\ & f(-\frac{m}{n}) = \left[f(\frac{m}{n})\right]^{-1} = \left[a^{\frac{m}{n}}\right]^{-1} = a^{-\frac{m}{n}}
\end{aligned}$$

再由單調性即得

$$f(x) = a^x$$

對于所有實數 x 皆成立。

[註]：不難証明 $f(x) = a^x$ 也是一個連續而且可微分的函數。証明的關鍵在于証明

$$\lim_{\Delta h \to 0} \frac{a^{\Delta h} - 1}{\Delta h}$$

存在。它是一個隨 a 而定的常數 C_a。由此即可推論

$$\lim_{\Delta h \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta h) - f(x_0)}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \to 0} a^{x_0} \left(\frac{a^{\Delta h} - 1}{\Delta h} \right) = C_a f(x_0)$$

亦即有 $f'(x) = C_a f(x)$。 再者，尚可推論 $C_{ab} = C_a + C_b$，即由

$$\begin{aligned}
C_{ab}(ab)^x &= \left[(ab)^x\right]' = \left[(a^x) \cdot (b^x)\right]' \\
&= [a^x]' \cdot b^x + a^x \cdot [b^x]' \\
&= [C_a + C_b](ab)^x \\
\Rightarrow \quad C_{ab} &= C_a + C_b
\end{aligned}$$

再把上述 C_a 想成 a 的函數 $g(a)$，則容易驗証 $g(a)$ 是 a 的單調遞增函數。遠在比 Euler 更早的年代，知道這種函數應該是一種對數函數。所以應該存在一個 $e > 1$，使得 $C_e = 1$。而 Euler 的研討發現

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

[他之所以用 e 表示這個特定常數，乃是要後人別忘了，這是 Euler 發現的重要常數，這也就是自然對數的底！]

6 複數系、複數指數和 Euler 公式

在數系的逐步擴張中，不論在概念的跳躍上和所涉及的方法論和技術性上，從有理數系到實數系這一步都是跨得最大也是所涉最為艱巨者。所幸者，實數系和直線段長度度量問題緊密相關，所以其直觀性極強，而且是定量幾何學上必須充份理解的基礎。這也就是為什麼實數系的理解在 Eudoxus 重建定量幾何基礎理論時業已大體完成。

相比起來，由實數系到複數系這一步實在要簡單得多。本質上只是引進一個平方為 -1 的「虛數」單位 i (unit of imaginary number) 然後用簡單自然的代數公式定義所有能夠表示成 $a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$ 的複數 (complex numbers) 之間的加法和乘法，即

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i\\ (a+bi)\cdot(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

很容易用直接驗算証明這種擴張的數系 $\mathbb{C}$ 依然滿足加、乘的交換律，結合律和分配律。再者，當 a,b 不全為零時

$$(a+bi)\cdot\frac{a-bi}{a^2+b^2}=1$$

所以複數系 $\mathbb{C}$ 在代數方面具有和有理數系 $\mathbb{Q}$、實數系 $\mathbb{R}$ 具有同樣易算好用的運算律。

【歷史的註記】：複數的引入，起始于解一元二次方程式：

$$ax^2+bx+c=0$$

在判別式 $b^2-4ac<0$ 時，上述二次方程式無實根。若引進複數，則上述二次方程式的解恆可以公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

表示之。但是這種做法並非真正有其必要而且是的確有其心理障礙的，這也就是為什麼把「i」叫做虛數的原因。但是到後來發現解一元三次方程式的公式解中，即使其三個根都是相異實數時，其公式必須通過複數然後再由于表達式中兩部份的虛部相消而得其三個實根。這是第一次在數學中顯示複數引入的某種必要性。隨著心理障礙的逐漸克服和複數理解的逐漸增加，它在數學中的用場和重要性也就開始有了長足的進展，例如代數基本定理的証明，複變函數論在十九世紀的蓬勃開展，以及它在電磁學、量子力學所扮演的自然而且基本的角色。複數系已經是理解大自然必不可缺的基本數系了。這裡且以複變指數函數的討論作為本文課題的結束。

【複變數指數函數】：

分析：(i) 設 e 為自然對數的底，亦即 Euler 所發現的

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

則有 $\left[e^x\right]' = e^x,\ \left[e^{kx}\right]' = ke^{kx}$。

(ii) 對于複變數 $z = x + iy$ 我們應該定義「e^z」$= e^x \cdot e^{iy}$，所以要點在于如何合理地定義「e^{iy}」。再者我們所要探索的函數「e^{iy}」應該是一個實變數複值函數，亦即

$$e^{iy} = f(y) + ig(y)$$

而它的微分應該就是

$$\left[e^{kx}\right]' = ke^{kx}$$

中 $k = i$ 的情形，亦即

$$f'(y) + ig'(y) = i\big(f(y) + ig(y)\big) = -g(y) + if(y)$$

所以我們所探求的乃是一對實變、實值函數 $\{f(y), g(y)\}$，它們具有關係

$$f'(y) = -g(y), \quad g'(y) = f(y)$$

而且具有初值條件：$f(0) = 1,\ g(0) = 0$，亦即

$$f(0) + ig(0) = e^0 = 1$$

不難証明

$$f(y) = \cos y, \quad g(y) = \sin y$$

是唯一能滿足上述條件的一對函數（參看習題 11）。所以 e^{x+iy} 應該定義為

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

再者，由

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \sin y \\ e^{-iy} = \cos y - i \sin y \end{cases}$$

即可解得

$$\cos y = \frac{1}{2}\left\{e^{iy} + e^{-iy}\right\}$$
$$\sin y = \frac{1}{2i}\left\{e^{iy} - e^{-iy}\right\}$$

這也就是著名的 Euler 公式。

【例題、習題與思考題】：