从「+1」运算到指数函数、三角函数

项武义*

数学的基础，归根究底乃是建筑在空间和数系这两种基本结构之上的。在本质上，空间 (space) 就是我们和宇宙中的一切都共存于其中者，是大自然所赋予的；而数系 (number system) 则是人类理性文明为了更加精确地定量研讨事物所构造的「计量」体系，所以是人的创造。在定量几何学 (quantitative geometry) 定量地研讨空间本质中，前者和後者自然地结合在一起，相辅相成。

最原始的数系就是我们用来数个数 (counting) 的自然数系 (system of natural numbers)，然後逐步扩充而得整数系 (system of integers)、分数系 (system of rational numbers)、实数系 (system of real numbers) 和复数系 (system of complex numbers)。通常分别以 $\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 表示上述数系，则上述逐步扩充（张）(extensions) 即可以

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

简约地表达之。

本文的中心课题就是要对上述逐步扩张而构造的一连串数系作一次归本究源的结构分析。唯有对数系结构的来龙去脉了然于心，才能在运用它们作各种各样定量分析、探索自然时得心应手。

1 自然数系

自然数系是人类为了数个数 (counting) 这样一种原始而且基本的「定量化」而创造的体系。例如有一位牧羊人要知道其羊群的个数，

*香港科技大学数学系

或当你发现月亮的圆缺变化是一种周而复始的事情，自然想统计一下其周期的天数等等。虽然各古文明所用的符号和体系不同，但是其本质都是一串逐一相连的符号体系，例如

$$\begin{array}{cccccc} | & || & ||| & |||| & \cdots \\ 一 & 二 & 三 & 四 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array}$$

其中第一个符号表示「单元」，是一只羊，一个人，一棵树的抽象化，而後继符号则表示比前述所表达者更加多一个，亦即

$$2 = 1 + 1,\ 3 = 2 + 1,\ 4 = 3 + 1,\ 5 = 4 + 1,\ \cdots$$
$$,101 = 100 + 1,\ 102 = 101 + 1,\ \cdots$$

由此可见，自然数系最为原始、基本的结构就是「+1」运算。在自然数系这一串顺序排列的符号体系中，後继者就是前者「+1」所得，而且任何一个自然数都可以由 1 起始，逐步「+1」而得之。

把上述事实改用「数学化」的集合用语来描述，即为

【数学归纳法原理】(Principle of mathematical induction)：自然数系 $\mathbb{N}$ 的一个子集 $\mathcal{S}$，若满足条件

$$1 \in \mathcal{S}, \quad n \in \mathcal{S} \Rightarrow n + 1 \in \mathcal{S}$$

则 $\mathcal{S}$ 必须等于 $\mathbb{N}$。

自然数系之所以有用、好用是因为它具有满足交换律、结合律和分配律的加法和乘法运算，这都是大家所熟知常用者。假如有人问你或者你自问：「为什麼那些运算律总是成立的呢？」此问显然不能用「实例的计算从来没碰到不成立的情形，所以应该是成立的」或者是人云亦云地「大家（或老师）都说它们总是成立的，所以我也相信它们是对的」作为解释，因为自然数的个数是无限的，而实例计算所能验算者只是很小的一部份。所以加、乘运算的运算律的普遍成立是需要加以论证的！这也就是我们所要讨论的第一个课题。此事当然得从「加法」和「乘法」的根源（亦即本质）说起：加法的本质乃是「+1」运算的复合。例如「+2」就是把「+1」做两次的结果，「+3」就是把

「$+1$」做三次的结果，「$+(n+1)$」就是比「$+n$」再多做一次「$+1$」者也。由此可见

$$a+(n+1)=(a+n)+1$$

其实就是加法的归纳定义式。再者加法结合律：

$$(a+m)+n=a+(m+n)$$

由上述加法的本质来看，即对 a 先作 m 次「$+1$」然後接著再作 n 次「$+1$」，其结果也就是对 a 作 $(m+n)$ 次「$+1$」，由此可见加法结合律的普遍成立是直观明显的。把它改用数学化的用语与格式说清楚，则是下述归纳论证 (Proof by induction)。

【定理一】（加法结合律）：$(a+m)+n=a+(m+n)$。

证明：对于任给 a,m，归纳证明上式对于所有自然数 n 皆成立。

(i) $n=1$ 时，$(a+m)+1=a+(m+1)$ 就是加法的归纳定义式。

(ii) 归纳假设 $(a+m)+n=a+(m+n)$，则有

$$\begin{aligned}(a+m)+(n+1)&=\big[(a+m)+n\big]+1 && [\text{(i)}]\\ &=\big[a+(m+n)\big]+1 && [\text{归纳假设}]\\ &=a+\big[(m+n)+1\big] && [\text{(i)}]\\ &=a+\big[m+(n+1)\big] && [\text{(i)}]\end{aligned}$$

接著让我们再用归纳法来证明加法交换律。

【定理二】（加法交换律）：$a+b=b+a$。

证明：先用归纳法证明 $a+1=1+a$。

(i) $a=1$ 时，$1+1=1+1$ 是显然的。

(ii) 归纳地设 $a+1=1+a$，则有

$$\begin{aligned}(a+1)+1&=(1+a)+1 && [\text{归纳假设}]\\ &=1+(a+1) && [\text{结合律}]\end{aligned}$$

(iii) 再由归纳假设 $a+b=b+a$ 证明

$$a+(b+1)=(b+1)+a$$

其证明如下：

$$\begin{aligned} a+(b+1) &= (a+b)+1 && [\text{结合律}] \\ &= (b+a)+1 && [\text{归纳假设}] \\ &= b+(a+1) && [\text{结合律}] \\ &= b+(1+a)=(b+1)+a \end{aligned}$$

现在再来分析一下乘法的本质和定义式：$1\cdot a=a$, $m\cdot a$ 就是 m 个 a 自相加的总和。所以 $(m+1)\cdot a$ 就是比 $m\cdot a$ 再多加一个 a。由此可见乘法的归纳定义式就是

$$1\cdot a,\quad (m+1)\cdot a=m\cdot a+a=m\cdot a+1\cdot a$$

再者，乘法左分配律：

$$m\cdot a+n\cdot a=(m+n)\cdot a$$

其实就是说把 m 个 a 自相加和 n 个 a 自相加的「和」再加起来，也就是 $(m+n)$ 个 a 自相加的总和。为了严谨起见，再给它一次归纳的证明。

【定理三】（左分配律）：$m\cdot a+n\cdot a=(m+n)\cdot a$。

证明：对于任给 m,a，归纳证明上式对于所有自然数 n 皆成立。

(i) $n=1$ 时，由定义知 $m\cdot a+1\cdot a=(m+1)\cdot a$。

(ii) 归纳地设 $m\cdot a+n\cdot a=(m+n)\cdot a$，则有

$$\begin{aligned} m\cdot a+(n+1)\cdot a &= m\cdot a+(n\cdot a+a) && [\text{定义}] \\ &= (m\cdot a+n\cdot a)+a && [\text{加法结合律}] \\ &= (m+n)\cdot a+a && [\text{归纳假设}] \\ &= \big[(m+n)+1\big]\cdot a && [\text{定义}] \\ &= \big[m+(n+1)\big]\cdot a \end{aligned}$$

[注意]：在尚未证明乘法交换律之前，分配律是有左、右之分别的。其实，乘法交换律的证明是要在左、右分配律都证得之後才能证得者。

【定理四】（右分配律）：$m\cdot(a+b)=m\cdot a+m\cdot b$。

证明：任取 a,b，对 m 作归纳证明如下：

(i) $m=1$ 时是显然成立的。

(ii) 归纳地设 $m\cdot(a+b)=m\cdot a+m\cdot b$ 成立，则

$$\begin{aligned}(m+1)\cdot(a+b) &= m\cdot(a+b)+(a+b) && [\text{定义}]\\ &= (m\cdot a+m\cdot b)+(a+b) && [\text{归纳假设}]\\ &= (m\cdot a+a)+(m\cdot b+b) && [\text{加法的交换、结合律}]\\ &= (m+1)\cdot a+(m+1)\cdot b\end{aligned}$$

【定理五】（乘法交换律）：$a\cdot b=b\cdot a$。

【定理六】（乘法结合律）：$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$。

【习题】：

(1) 试用归纳法证明乘法交换律。

(2) 试用归纳法证明乘法结合律。

指数符号：$a^1=a$，$a^m\cdot a=a^{m+1}$（指数归纳定义式）。

(3) 试证指数定则 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$。

(4) 试证指数定则 $(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$。

(5) 试证指数定则 $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$。

2 整数数系

减法乃是加法的逆算：$(a-b)$ 就是那个加上 b 後等于 a 的唯一解，亦即方程式

$$x+b=a$$

的唯一解就是 $(a-b)$。但是在自然数系中，上述方程式只有在 a 大于 b 时才能「有解」！在此，一个自然而然的想法是：上式在 $a \leq b$ 时在自然数系中「无解」乃是由于自然数系的范畴太狭窄了。因此，可以把它作适当的扩充来消除这种不理想的缺陷。换句话说，我们由自然数去构造一些新的数，使得在扩张後的数系中 $x+b=a$ 总是有唯一解。例如设

$$x+1=1$$

的解是一个新的数「0」，则由

$$0+n=n \Rightarrow 0+(n+1)=(0+n)+1=n+1$$

可见这个新数 0 满足

$$0+a=a$$

再者，我们也需要引进

$$x+a=0$$

的解，以符号「$-a$」表之。由此易见在 $a>b$ 时，

$$x+b=a$$

的解是一个自然数 $(a-b)$，而在 $a<b$ 时

$$x+b=a$$

的解就是那个新数 $-(b-a)$，因为

$$\begin{aligned} -(b-a)+b &= -(b-a)+\big[(b-a)+a\big] \\ &= \big[-(b-a)+(b-a)\big]+a \\ &= 0+a=a \end{aligned}$$

总结上述简短分析，可见一个包含自然数系的扩张数系，若要满足同样的加乘运算律，而且使得减法通行无阻，亦即 $x+b=a$ 对于任给 a,b 恒有解，则它至少包含一个「0」和每个自然数 a 的负数「$-a$」。这样一个数系就是我们常用、好用的整数系：

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-a,\,a\in\mathbb{N}\}$$

当然，我们还得要适当地定义整数系中的加、乘和指数运算。在这个关键性的步骤上，定义的适当性的检验准则是在扩张的数系中依然保有各个运算律，因为那些运算律乃是数系有用、好用的根本所基。其实上述保有运算律的准则业已唯一地确定了整数系中加、乘、指数运算的适当定义的必然性。兹分析如下：

【分析】：

(1) $0+0=0$，$0+a=a$，$(-a)+a=0$ 则是「0」和「$-a$」的定义式。

(2) 对于任给自然数 a,b，

$$\begin{cases}(-a)+b=b+(-a)=b-a\\(-a)+b=b+(-a)=-(a-b)\end{cases}\quad\text{若}\quad\begin{cases}b>a\\a>b\end{cases}$$

上述定义之必然性：

若 $b>a$，则

$$\begin{aligned}(-a)+b&=(-a)+\big[a+(b-a)\big]\\&=\big[(-a)+a\big]+(b-a)\\&=0+(b-a)=b-a\end{aligned}$$

若 $a>b$ 则

$$\begin{aligned}\big[(-a)+b\big]+(a-b)&=(-a)+\big[b+(a-b)\big]\\&=(-a)+a=0\end{aligned}$$

所以 $(-a)+b=-(a-b)$。

(3) 对于任给自然数 a，皆有

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0, \quad (-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a$$

上述定义之必然性：

$$\begin{aligned} &0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a \Rightarrow 0 \cdot a = 0 \\ &0 = 0 \cdot a = \big[1 + (-1)\big] \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = a + (-1) \cdot a \\ &\Rightarrow (-1) \cdot a = -a \end{aligned}$$

[特例：$(-1) \cdot 1 = 1 \cdot (-1) = -1$]

(4) $(-1) \cdot (-1) = 1$

定义之必然性：

$$\begin{aligned} 0 = (-1) \cdot 0 &= (-1) \cdot \big[(-1) + 1\big] = (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \\ &= (-1) \cdot (-1) + (-1) \quad \Rightarrow (-1) \cdot (-1) = 1 \end{aligned}$$

(5) 符号定则：$(-a) \cdot b = -a \cdot b$, $(-a)(-b) = a \cdot b$

定义之必然性：

$$\begin{aligned} &(-a) \cdot b = \big[(-1) \cdot a\big] b = (-1) \cdot (a \cdot b) = -a \cdot b \\ &(-a) \cdot (-b) = \big[(-1) \cdot a\big] \big[(-1) \cdot b\big] = \big[(-1)(-1)\big](a \cdot b) = 1 \cdot (a \cdot b) = a \cdot b \end{aligned}$$

总结上面几点分析，可见我们业已熟习的整数系中的正、负数和 0 之间的计算法则，其实乃是能使得整数系的运算依然保持原先的那一套运算律的「唯一可能定义法」（必然性）。当然，我们还得去验证这种唯一的可能定义法是真的能够保有各个运算律的！这一点是很好的习题题材。

【习题】：逐一证明上述所定义的整数系的加乘运算满足加、乘的交换律、结合律和分配律。

3 分数系（亦称有理数系）

除法乃是乘法的逆算：$(a \div b)$ 就是那个乘以 b 後等于 a 的唯一解 $(b \neq 0)$，亦即方程式

$$x \cdot b = a, \quad (b \neq 0)$$

的唯一解定义为 $(a \div b)$。但是在整数系中，上述方程式只有在 b 是 a 的因数（亦即 a 是 b 的倍数）的情形才能「有解」。由此可见，整数系还得要加以适当的扩充才能消除这种不理想的「缺陷」。这也就是由整数系到分数系（亦称有理数系）的扩张。

【定义】：对于整数 a 和 $b\,(b \neq 0)$ 定义分数「$\frac{a}{b}$」为方程式

$$x \cdot b = a$$

的唯一解：易见它也是 $x \cdot bk = ak$ 的解，所以 $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$。

若 $ad = cb$，$b, d \neq 0$ 则 $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} = \frac{cb}{db} = \frac{c}{d}$，反之若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$，亦即 $x \cdot b = a$ 和 $x \cdot d = c$ 具有同解，所以 $ad = x \cdot bd = (xd)b = cb$。由此可见「$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 的充要条件」是 $ad = cb$。

接著让我们来分析一下分数之间的加法和乘法应该如何定义才能确保分数系的加、乘运算依然保有交换、结合和分配律。

(i) $$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}\right) \cdot bb' &= \left(\frac{a}{b}\right) \cdot bb' + \left(\frac{a'}{b'}\right) b'b \\ &= ab' + a'b\end{aligned}$$

所以应该定义加法如下：

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'} \quad (b, b' \neq 0)$$

(ii) $$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b'}\right) bb' = \left[\left(\frac{a}{b}\right) \cdot b\right] \left[\left(\frac{a'}{b'}\right) \cdot b'\right] = aa'$$

所以应该定义乘法如下：

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a'}{b'}\right) = \frac{aa'}{bb'} \quad (b, b' \neq 0)$$

采用上述分数的加法、乘法定义式和两个分数的相等检验条件，就容易把分数系的加、乘运算律归于整数系的加乘运算律来加以逐一验证。[此事留作习题]

指数定义的推广：设 a,b 是非零整数，则 $\left(\frac{a}{b}\right)^0$ 定义为 1，$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$ 定义为 $\left(\frac{b}{a}\right)^n$。

上述定义是使得指数定则在指数等于整数时恒成立的唯一定义法，即有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n} \quad , m,n \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n} \quad , m,n \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m , \quad m \in \mathbb{Z}$$

4 实数系 (real number system)

在概念上和研讨方法上，由有理数系到实数系是一个大幅度的跃进。在人类理性文明发展史上，这个跃进发生于纪元前五、四世纪古希腊几何学家在定量几何基础理论的深入研究之中。长话短说，首先他们认识到长度乃是各种各样几何量之中最为原始基本者，所以长度的度量是研究定量几何的起点和奠基之所在。在此，他们提出两个直线段 a,b 可公度 (commensurable) 的概念：

【定义】：若存在一个公尺度 c 使得一对给定直线段 a,b 分别是它的整数倍，即 $a = m\cdot c, b = n\cdot c$，则称两者为可公度的，而两者长度之比 $a:b$ 当然就可以定义为分数 $\frac{m}{n}$。即

$$a:b = \frac{m}{n} \Leftrightarrow \text{存在 } c \text{ 使得 } a = m\cdot c,\ b = n\cdot c$$

[注]：假如 m,n 是互素的，则 c 乃是 a,b 的公尺度之中的最长者。

当年他们还主观地认为这种可公度性 (commensurability)「乃是」普遍成立于任何一对直线段之间的，并且以此为当年古希腊几何学家所致力于其建立的定量几何基础论 (foundation of quantitative geometry) 的头号公理 (Number One Axiom)。但是在毕氏 (Pythagoras) 死後不久，其门徒 Hippasus 却发现并严格证明一个正五边形的边长和其对角线长是不可公度的！（随後他也以同样证法证明一个正方形的边长和其对角线长也是不可公度的。）这个伟大的发现事实胜于雄辩地证明分数系是不足以处理长度的度量的！不可公度的直线段的长度的比值肯定不是一个分数！而当年希腊几何学界所引以自豪的定量几何基础论中所有的基本定理（如相似三角形定理）和基本公式（如三角形面积公式、毕氏定理）都是植基于可公度性普遍成立这个错误的公理之上的，岂非全盘皆空!? 其实，此事并非全盘皆空，只是他们原先以为完整无缺的「普遍」情形的证明，其实乃是在所涉及的线段都是可公度的特殊情形的证明是也。而普遍、不可公度的情形尚有待补证！这个补证和全面重建定量几何基础论的任务在 Hippasus 因为他的伟大发现而被其恼羞成怒的同门所杀害之後约半个世纪，才由 Eudoxus 于以完成。这个长达半世纪的严峻挑战促使 Eudoxus 开创一种崭新的思路和方法，简约言之，这就是用逼近法把实数系的研讨归于有理数系的研讨 (method and principle of approximation)。上面所说的这一段古希腊定量几何学发展史乃是整个人类理性文明发展史中的重大篇章和辉煌的里程碑，自然得另列专题详加研讨其本末来由和深远的影响。在这里我们只是从数系逐步扩张的观点，把 Eudoxus 所创的逼近原理和方法，改用现代通用的术语把从有理数系到实数系的扩张的精要之点，作一简朴明确的叙述。

1. 不可公度直线段的发现，事实胜于雄辩地证明了简单、初等的有理数系是不足以表达任给两个直线段之间的比值的；足以用来表达、研讨长度的度量的数系肯定要包含许多许多那些不可公度的长度比值的非分数 (irrational numbers)。总之，它是一个比有理数系更大的数系——实数系。

2. Eudoxus 的逼近原理和逼近法明确了实数系和有理数系之间的关系，以及用有理数逼近非分数，从而研讨实数系的有效途径。兹简述其精要如下：

(i) 比较原则：设 a,b 不可公度，则其比值 $a:b$ 是一个非比实数。它和一个分数 $\dfrac{m}{n}$ 之间的大、小比较原则是

$$a:b \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} \frac{m}{n} \Leftrightarrow \begin{cases} n\cdot a > m\cdot b \\ n\cdot a < m\cdot b \end{cases}$$

(ii) 逼近原理：对于任给非比实数的比值 $a:b$ 和任给正整数 n，皆有整数 m 使得

$$\frac{m}{n} < a:b < \frac{m+1}{n}$$

所以在 n 无限增大时，所给的非比实数可以用相差只有 $\frac{1}{n}$ 的分数左右夹逼，因此 $a:b$ 和其左、右夹逼的分数之间的差别是可以小到任意小的。

(iii) 两个非比实数 $a:b$ 和 $c:d$ 相等的定义：

两个不可公度的比值 $a:b$ 和 $c:d$ 相等的定义是两者和所有分数都有相同的大、小关系，亦即

$$na \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} mb \Leftrightarrow nc \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} md$$

对所有自然数 m,n 皆成立。

[注]：若改用现代的数列术语来重述 (iii)，即为下述数列极限的唯一性

设 λ，λ' 是同介于两个左、右夹逼数列 $\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$ 之间的实数，即

$$r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_n \le r_{n+1} \le \cdots \le \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \lambda' \end{matrix} \right\} \le \cdots \le s_{n+1} \le s_n \le \cdots \le s_2 \le s_1$$

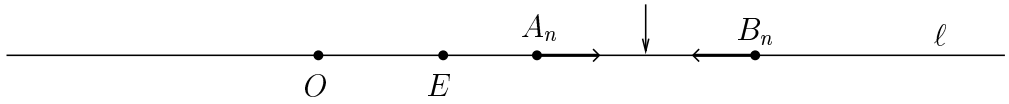
而且 $(s_n - r_n) \to 0$，则必有 $\lambda = \lambda'$。

3. 在当年 Eudoxus 所要研讨的长度度量问题上，比值 $a:b$ 是「原给者」，对于每个 n，他证明存在由 $a:b$ 而定的 m 使得

$$r_n = \frac{m}{n} < a:b < \frac{m+1}{n} = s_n$$

从而构造得 $a:b$ 的一对左、右夹逼数列 $\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$，所以根本没有「存不存在一个被它们所左、右夹逼的实数？」这种问题，因为它就是原给的「$a:b$」！

但是在近代数学中，特别是分析学，我们经常会用到以种种方式构造而得的数列，因而讨论它们的极限的存在性问题就自然而然地成为很有其必要了。显然任何论证，必要有所本，有所依据（证明是不可能无中生有的！）所以近代数学中各种各样的存在性定理当然也必然有其所本。而其所本，归根研底就是上述左、右夹逼数列的存在性：即对于两个左、右夹逼数列 $\{r_n\} \to\leftarrow \{s_n\}$，恒存在有一个实数被两者所夹逼；从实数在直线段长度度量的直观内含来看，设直线 ℓ 上取定基点 O 和单位长线段 $\overline{OE}$，则线上的点 $A \in \ell$ 和实数 $a \in \mathbb{R}$



之间有一个一、一对应，即 $a = \overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OE}$ 是 $\overrightarrow{OA}$ 的有向长度。因此，对应于两个左、右夹逼数列 $\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$ 就有两个左、右夹逼的 ℓ 上的点列 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 使得 r_n, s_n 分别是 $\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n}$ 的有向长度。由此可见被 $\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$ 所左、右夹逼的那个实数 λ 所相应的点也就是直线 ℓ 上把 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 分割在它的两侧的那个分界点。

反之，假如这样一个被 $\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$ 所左、右夹逼的实数不存在的话，其直观内含（亦即几何意义）就是直线 ℓ 上缺了这样一个分界点。但是直线是连续不断的；而去掉一点则把一条直线切为两段。所以直线上不能有任何这种「缺了」分界点的情形其实就是直线乃是连续不断的确切描述；而上述左、右夹逼数列的被夹逼的实数的存在性则是直线的连续性的解析描述 (the analytical description of the continuity of straight line)。[这也就是通常把上述存在性叫做实数系的连续性的原由。]

总结上面三点，实数系的发现和理解都和长度度量问题密切关联，而实数系中任何一对左、右夹逼数列都存在有一个被它们所夹逼的实

数（亦即它们的共同极限）则是直线连续不断的解析描述，称之为实数系的连续性，而它又是近代数学中各种各样存在性定理（例如代数基本定理等等）的证明之所据。再者，实数系是有理数系的一种自然扩张，任何一个实数都能用一对左、右夹逼的分数数列去唯一地描述它；反之，任给一对左、右夹逼的分数数列也都描述著一个实数。这样不但简明扼要地刻划了有理数系和实数系之间的关系，而且也提供了用有理数系去研讨实数系的有效途径和方法。

5 指数函数

【引理一】：设 a 是一个大于 1 的给定实数，n 是一个大于 1 的给定整数，则存在一个唯一的正实数 x_0，它的 n 次方等于 a，亦即方程式

$$x^n = a$$

具有唯一的正实根。

证明：先证唯一性。设 x_1, x_2 是两个正实数，

$$x_1^n = a, \quad x_2^n = a$$

则必有 $x_1 = x_2$。假如不然，则有 $x_1 > x_2$ 或 $x_1 < x_2$。但是

$$\left.\begin{matrix} x_1 > x_2 \\ x_1 < x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1^n > x_2^n \\ x_1^n < x_2^n \end{matrix}\right.$$

是和所设 $x_1^n = x_2^n = a$ 相矛盾的。所以 x_1 必须等于 x_2。

再证存在性：若存在有一个正分数 $\frac{m}{p}$ 使得 $(\frac{m}{p})^n = \frac{m^n}{p^n} = a$，则不必再证。不然，则 x_0 就是那个小于所有其 n 次方大于 a 的正分数，而又大于所有其 n 次方小于 a 的正分数的唯一实数。 □

[上述唯一正实根叫做 a 的 n 方根。通常以 $\sqrt[n]{a}$ 表示之。]

【定义】：$a^{\frac{1}{n}}$ 定义为 $\sqrt[n]{a}$，亦即 $x^n = a$ 的唯一正实根。

$a^{\frac{m}{n}}$ 定义为 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$。

$a^{-\frac{m}{n}}$ 定义为 $\dfrac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$。

【习题】：

(i) 试证 $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$。

(ii) 设 a 是一个小于 1 的正实数。试证

$$x^n = a$$

的正实根唯一存在。

(iii) 试证 $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{(\frac{m}{n}+\frac{p}{q})}$。

(iv) 试证 $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$。

(v) 试证若 $a > 1$, $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$，则 $a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}$。

(vi) 试证若 $a > b$，则 $a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}$。

【引理二】：设 $a > 1$，$\varepsilon > 0$ 是一个任给正分数。则存在有足够大的 n 使得 $\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$。

证明：取 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}(a-1)$，则有 $(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon > a$，所以 $\sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon$。 □

【推论】：设 $a > 1$，而且 $\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$ 是一对左、右夹逼正分数列，即

$$0 < r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_n \le r_{n+1} \le \cdots \le s_{n+1} \le s_n \le \cdots \le s_2 \le s_1$$

而且 $(s_n - r_n) \to 0$（亦即可以小到任意小），则 $\{a^{r_n}\}$ 和 $\{a^{s_n}\}$ 也是一对左、右夹逼数列。

证明：由 $a > 1$ 和 $\frac{m}{n} > \frac{p}{q} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}$ 可见 $\{a^{r_n}\}$ 是递增的而 $\{a^{s_n}\}$ 则是递减的。所以唯一还需要验证者乃是

$$\left(a^{s_n} - a^{r_n}\right) \quad \text{可以小到任意小。}$$

兹证之如下：

设 $\varepsilon>0$ 是任给正分数，另取一个正分数 $\varepsilon'>0$ 使得 $a^{s_1}\cdot\varepsilon'<\varepsilon$。由引理二即有一个足够大的 N，使得

$$a^{\frac{1}{N}}<1+\varepsilon'$$

再者，由所设 $(s_n-r_n)\to 0$，即有足够大的 n 使得 $(s_n-r_n)<\dfrac{1}{N}$。由此即得

$$\begin{aligned} a^{s_n}-a^{r_n} &= a^{r_n}\left(a^{(s_n-r_n)}-1\right)\\ &< a^{s_1}\cdot\left(a^{\frac{1}{N}}-1\right)\\ &< a^{s_1}\cdot\varepsilon'<\varepsilon \end{aligned}$$

□

【定义】：设 $a>1$，λ 是一个给定正实数，$\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$ 是 λ 的一对左、右夹逼正分数数列。则定义 a^{λ} 为左、右夹逼数列 $\{a^{r_n}\}$ 和 $\{a^{s_n}\}$ 所夹逼的那个正实数。

<u>定义之合理性</u>：我们必须验证上述定义和 λ 的左、右夹逼正分数列的选取无关，唯有这样，上述定义才是合理的。为此，设 $\{r'_n\}$ 和 $\{s'_n\}$ 是另一 λ 的左、右夹逼正分数数列，则有

$$\{r_n\}\text{ 和 }\{s'_n\}\quad\text{以及}\quad\{r'_n\}\text{ 和 }\{s_n\}$$

也都是 λ 的左、右夹逼数列。所以

$$\{a^{r_n}\}\text{ 和 }\{a^{s'_n}\}\quad\text{以及}\quad\{a^{r'_n}\}\text{ 和 }\{a^{s_n}\}$$

也都是左、右夹逼数列。因此

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}a^{r_n} &= \lim_{n\to\infty}a^{s'_n}\\ \lim_{n\to\infty}a^{r'_n} &= \lim_{n\to\infty}a^{s_n} \end{aligned}$$

由此可见上述四个极限都相等。所以定义它们的共同极限为 a^{λ} 是完全合理且自然的！

【定义】：$a^{-\lambda}$ 定义为 $\dfrac{1}{a^{\lambda}}$。

总结上面由一个给定 $a>1$ 的整数指数到它的分数指数然後再到它的实数指数的逐步推广，所用到基本上就是实数系的连续性，和分数指数的单调性和夹逼性，亦即

$$\frac{m}{n}>\frac{p}{q}\Rightarrow a^{\frac{m}{n}}>a^{\frac{p}{q}}$$
$$(s_n-r_n)\to 0\Rightarrow (a^{s_n}-a^{r_n})\to 0$$

再者，把 $x\mapsto a^x$ 想成一个实变数 x 的函数，亦即定义 $f(x)=a^x$，称之为<u>以 a 为底的指数函数</u> (the exponential function with a as the base)。

【定理六】：指数函数 $f(x)=a^x,\,(a>1)$ 满足下述性质：

(i) $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$。

(ii) $f(x)$ 是 x 的（真，或严格）单调递增函数 (strictly monotonic-increasing function)。

[证明留作习题]

【定理七】：设有实数函数 $f(x)$ 满足上述两点，则 $f(x)=\big[f(1)\big]^x$。

<u>证明</u>：由 (i) 即得

$$f(x)=f(0+x)=f(0)\cdot f(x)\Rightarrow f(0)=1$$

再由 (ii) 即有 $f(1)>f(0)=1$。令 $a=f(1)$。再用 (i) 即有 $f(\frac{1}{n})>f(0)=1$，而且有

$$\begin{aligned}
&\big[f(\frac{1}{n})\big]^n=f(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n})=f(1)=a\\
\Rightarrow\ &f(\frac{1}{n})=\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}\\
\Rightarrow\ &f(\frac{m}{n})=\big[f(\frac{1}{n})\big]^m=\big(\sqrt[n]{a}\big)^m=a^{\frac{m}{n}}\\
&f(-\frac{m}{n})\cdot f(\frac{m}{n})=f(0)=1\\
\Rightarrow\ &f(-\frac{m}{n})=\big[f(\frac{m}{n})\big]^{-1}=\big[a^{\frac{m}{n}}\big]^{-1}=a^{-\frac{m}{n}}
\end{aligned}$$

再由单调性即得

$$f(x) = a^x$$

对于所有实数 x 皆成立。

[注]：不难证明 $f(x) = a^x$ 也是一个连续而且可微分的函数。证明的关键在于证明

$$\lim_{\Delta h \to 0} \frac{a^{\Delta h} - 1}{\Delta h}$$

存在。它是一个随 a 而定的常数 C_a。由此即可推论

$$\lim_{\Delta h \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta h) - f(x_0)}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \to 0} a^{x_0} \left(\frac{a^{\Delta h} - 1}{\Delta h} \right) = C_a f(x_0)$$

亦即有 $f'(x) = C_a f(x)$。再者，尚可推论 $C_{ab} = C_a + C_b$，即由

$$\begin{aligned} C_{ab}(ab)^x &= \left[(ab)^x\right]' = \left[(a^x) \cdot (b^x)\right]' \\ &= [a^x]' \cdot b^x + a^x \cdot [b^x]' \\ &= [C_a + C_b](ab)^x \\ \Rightarrow \quad C_{ab} &= C_a + C_b \end{aligned}$$

再把上述 C_a 想成 a 的函数 $g(a)$，则容易验证 $g(a)$ 是 a 的单调递增函数。远在比 Euler 更早的年代，知道这种函数应该是一种对数函数。所以应该存在一个 $e > 1$，使得 $C_e = 1$。而 Euler 的研讨发现

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

[他之所以用 e 表示这个特定常数，乃是要後人别忘了，这是 Euler 发现的重要常数，这也就是自然对数的底！]

6 复数系、复数指数和 Euler 公式

在数系的逐步扩张中，不论在概念的跳跃上和所涉及的方法论和技术性上，从有理数系到实数系这一步都是跨得最大也是所涉最为艰巨者。所幸者，实数系和直线段长度度量问题紧密相关，所以其直观性

极强，而且是定量几何学上必须充份理解的基础。这也就是为什麼实数系的理解在 Eudoxus 重建定量几何基础理论时业已大体完成。

相比起来，由实数系到复数系这一步实在要简单得多。本质上只是引进一个平方为 -1 的「虚数」单位 i (unit of imaginary number) 然後用简单自然的代数公式定义所有能够表示成 $a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$ 的复数 (complex numbers) 之间的加法和乘法，即

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di)&=(a+c)+(b+d)i\\(a+bi)\cdot(c+di)&=(ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

很容易用直接验算证明这种扩张的数系 $\mathbb{C}$ 依然满足加、乘的交换律，结合律和分配律。再者，当 a,b 不全为零时

$$(a+bi)\cdot\frac{a-bi}{a^2+b^2}=1$$

所以复数系 $\mathbb{C}$ 在代数方面具有和有理数系 $\mathbb{Q}$、实数系 $\mathbb{R}$ 具有同样易算好用的运算律。

【历史的注记】：复数的引入，起始于解一元二次方程式：

$$ax^2+bx+c=0$$

在判别式 $b^2-4ac<0$ 时，上述二次方程式无实根。若引进复数，则上述二次方程式的解恒可以公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

表示之。但是这种做法并非真正有其必要而且是的确有其心理障碍的，这也就是为什麼把「i」叫做虚数的原因。但是到後来发现解一元三次方程式的公式解中，即使其三个根都是相异实数时，其公式必须通过复数然後再由于表达式中两部份的虚部相消而得其三个实根。这是第一次在数学中显示复数引入的某种必要性。随著心理障碍的逐渐克服和复数理解的逐渐增加，它在数学中的用场和重要性也就开始有了长足的进展，例如代数基本定理的证明，复变函数论在十九世纪的蓬

勃开展，以及它在电磁学、量子力学所扮演的自然而且基本的角色。复数系已经是理解大自然必不可缺的基本数系了。这里且以复变指数函数的讨论作为本文课题的结束。

【复变数指数函数】：

分析：(i) 设 e 为自然对数的底，亦即 Euler 所发现的

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

则有 $\left[e^x\right]' = e^x,\ \left[e^{kx}\right]' = ke^{kx}$。

(ii) 对于复变数 $z = x + iy$ 我们应该定义「e^z」$= e^x \cdot e^{iy}$，所以要点在于如何合理地定义「e^{iy}」。再者我们所要探索的函数「e^{iy}」应该是一个实变数复值函数，亦即

$$e^{iy} = f(y) + ig(y)$$

而它的微分应该就是

$$\left[e^{kx}\right]' = ke^{kx}$$

中 $k = i$ 的情形，亦即

$$f'(y) + ig'(y) = i\big(f(y) + ig(y)\big) = -g(y) + if(y)$$

所以我们所探求的乃是一对实变、实值函数 $\{f(y), g(y)\}$，它们具有关系

$$f'(y) = -g(y), \quad g'(y) = f(y)$$

而且具有初值条件：$f(0) = 1,\ g(0) = 0$，亦即

$$f(0) + ig(0) = e^0 = 1$$

不难证明

$$f(y) = \cos y, \quad g(y) = \sin y$$

是唯一能满足上述条件的一对函数（参看习题 11）。所以 e^{x+iy} 应该定义为

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

再者，由

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \sin y \\ e^{-iy} = \cos y - i \sin y \end{cases}$$

即可解得

$$\cos y = \frac{1}{2}\{e^{iy} + e^{-iy}\}$$
$$\sin y = \frac{1}{2i}\{e^{iy} - e^{-iy}\}$$

这也就是著名的 Euler 公式。

【例题、习题与思考题】：