實數系連續性的幾個應用範例

項武義*

我們可以從實數和長度度量的密切關聯認識到實數系的連續性和直線連續不斷的直觀內含之間的對應關係，即前者乃是後者的解析描述 (analytical formulation)。直線是連續不斷的，但是切去其任給一點即斷成兩段是直觀至為明顯者，但是直觀是無法用來作為研討其他各種各樣連續性的依據的。而一對左、右夾逼數列的共同極限的存在性，則是一個明確嚴謹的解析描述。它把直觀明顯的直線連續現象，轉化為便于用來解析論証，研討其他各種各樣連續性，例如曲線的連續性、函數的連續性等等的基礎。

1 函數的連續性和連續函數的中間值定理

從直觀上來看，一個定義在閉線段 $[a,b]=\{x;a\leq x\leq b\}$ 上的實變、實值函數 $y=f(x)$ 是一個「連續函數」應該和其圖像曲線：

$$\Gamma(f)=\{(x,f(x);a\leq x\leq b\}$$

為一條「連續曲線」是一回事。但是一條曲線的連續性又如何去判定呢？一種自然的說法是：一條曲線 γ 乃是一個「動點」的軌跡，而動點者也，乃是一個位置隨時間而變動的點，它的解析描述就是其 x,y 坐標分別是時間 t 函數，即

$$\gamma:\quad x=f(t),\ y=g(t),\quad a\leq t\leq b$$

通常稱之為曲線 γ 的參數表示 (parametric representation of a curve γ)。例如圖像 $\Gamma(f)$ 的一種參數表示就是：

$$\Gamma:\quad x=t,\ y=f(t)$$

*香港科技大學數學系

單位圓的一種參數表示是：

$$x = \cos t,\ y = \sin t$$

橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一種參數表示是：

$$x = a \cos t,\ y = b \sin t.$$

其實，在幾何中連續曲線的定義乃是它的參數表示中那一對函數都是連續函數。所以歸根究底，我們必須先對函數的連續性給以解析的定義。

一個函數關係所描述的是因變量 y 隨著自變量 x 的取定而如何確定其相應之值，亦即函數值 y 的變化如何由自變數 x 的變化從而確定。連續函數的直觀內含是當 x「連續變化」時，y 也隨著「連續變化」，亦即當 x 作微小的改變時，相應的 y 的改變也必然是微小的。把上述直觀內含給以嚴謹的解析描述，即為下述函數連續性的定義。先定義函數在一個點 $x = x_0$ 的連續性。

【定義】：$y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 的連續性定義為：對于任給正數 $\varepsilon > 0$，皆有另一足夠小的 $\delta > 0$ 使得

$$|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

[亦即，只要 x 和 x_0 的差別足夠小，則其相應函數值 $f(x)$ 和 $f(x_0)$ 就可以小到任意小。]

若把上述局部連續性的定義和數列極限的定義結合起來，即有

$$a_n \to x_0 \ \Rightarrow \ f(a_n) \to f(x_0)$$

亦即 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$。

【定義】：一個函數 $y = f(x)$ 的全局連續性也就是它在其定義域上每個點皆滿足上述局部連續性。

【例子】：

(1) 多項式函數如 $y=x^2, y=x^n, y=(3x+1)(x^2-1)$ 等等都是到處連續的。

(2) $y=e^x$ 是到處連續的。

(3) $y=\cos x, y=\sin x$ 也是到處連續的。

【習題】：

(1) 試証 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 點的局部連續性。

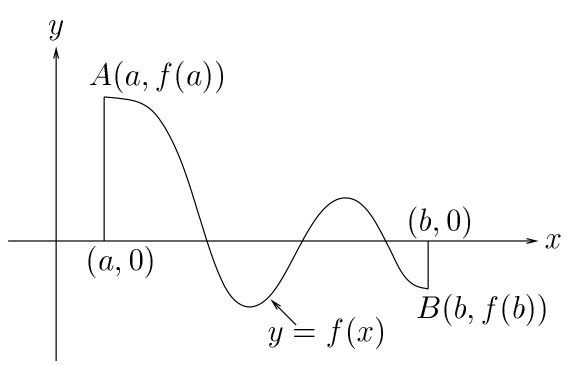
(2) 試証 $y=\cos x$ 在 $x=0$ 點的局部連續性。

(3) 試証 $y=\sin x$ 的全局連續性。

(4) 試証 $y=\cos x$ 的全局連續性。

【定理一】：設 $y=f(x)$ 是定義在 $a\leq x\leq b$ 上的連續函數，而且 $f(a)\cdot f(b)<0$（亦即 $f(a)$ 和 $f(b)$ 異號），則必存在有 $a<x_0<b$ 使得 $f(x_0)=0$。

証明：直觀地來說，$y=f(x)$ 的圖像曲線是一條連結 $A=(a,f(a))$ 和 $B=(b,f(b))$ 兩點之間的連續曲線，而 A、B 是分居于直線 $y=0$（x–軸）的兩側的（因為 $f(a)$ 和 $f(b)$ 異號）。所以由直觀來看，它必須要和 x–軸至少相交于一點。這也就是我們所要証的，而証明的依據當然就是實數的連續性和函數的連續性的解析描述。



[圖–1]

証明的基本想法是由所給的連續函數 $f(x)$ 去逐步構造我們所要論証其存在的那個使得 $f(x_0)=0$ 的點 x_0 的一對左、右夾逼數列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$。其構造如下：

令 $a_1=a, b_1=b$。若 $f\Big(\dfrac{a_1+b_1}{2}\Big)=0$ 則 $\dfrac{a_1+b_1}{2}$ 即為所求的 x_0，自然就不必再去構造了。不然，則 $f\Big(\dfrac{a_1+b_1}{2}\Big)$ 和 $f(a_1), f(b_1)$ 之中一個同號，另一個異號。若它和 $f(a_1)$ 同號，則令 $a_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_2=b_1$；若它和 $f(b_1)$ 同號，則令 $a_2=a_1, b_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$。總之，上述取法確保了 $f(a_2)\cdot f(b_2)<0$。

以同樣的選取法由 (a_2,b_2) 去構造 (a_3,b_3)，再由 (a_3,b_3) 去構造 (a_4,b_4)，$\cdots$，由 (a_n,b_n) 去構造 (a_{n+1},b_{n+1})。當然，在 $f\Big(\dfrac{a_n+b_n}{2}\Big)=0$ 時，則 $x_0=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ 即為所求，也就不必再去構造了。在這種情形一直不發生時，上述逐步構造就得出一對數列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，前者遞增而後者遞減，而且 $b_n-a_n=\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1}(b-a)\to 0$，所以是一對左、右夾逼數列。再者，由于上述逐步選取中，我們始終確保了 $f(a_n)\cdot f(b_n)<0$ 這個條件。

由實數系的連續性得知存在 x_0 介于所有的 a_n, b_n 之間，亦即

$$x_0=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$$

再由 $f(x)$ 在 x_0 點的連續性，即有

$$\begin{gathered} f(x_0)=\lim_{n\to\infty} f(a_n), \quad f(x_0)=\lim_{n\to\infty} f(b_n) \\ f(x_0)^2=\lim_{n\to\infty} f(a_n)\cdot f(b_n)\le 0 \;\Rightarrow\; f(x_0)=0 \end{gathered}$$

[因為 $f(a_n)\cdot f(b_n)<0$，所以其極限<u>不</u>可能 >0！] □

【推論一】（中間值定理）：設 $y=f(x)$ 是在 $a\le x\le b$ 上的連續函數，c 是介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之間的一個數，亦即 $\big(f(a)-c\big)\big(f(b)-c\big)<0$，則必存在 $a\le x_0\le b$ 使得 $f(x_0)=c$。

[証明] 顯然 $y=f(x)-c$ 也是在 $a\leq x\leq b$ 上的連續函數。對它直接運用定理一，即得 $f(x_0)-c=0$。

【推論二】：設多項式 $f(x)$ 在 a、b 兩點之值異號，則 $f(x)$ 在 a、b 之間至少有一個根。

【推論三】：設 $f(x)$ 是一個奇次多項式，則 $f(x)$ 至少有一個實根。

[証明] 不妨設 $f(x)$ 的首項系數是 1，即

$$f(x)=x^{2k+1}+c_1x^{2k}+c_2x^{2k-1}+\cdots+c_{2k+1}$$

令 $M=\mathrm{Max}\{|c_i|,1\leq i\leq 2k+1\}$。設 $K>2(M+2)$ 則有

$$\begin{aligned}
f(K) &= K^{2k+1}\{1+c_1\frac{1}{K}+c_2\frac{1}{K^2}+\cdots+c_{2k+1}\frac{1}{K^{2k+1}}\}\\
&\geq K^{2k+1}\{1-M\cdot[\frac{1}{K}+\frac{1}{K^2}+\cdots+\frac{1}{K^{2k+1}}]\}\\
&\geq K^{2k+1}\{1-\frac{M}{2M+3}\}>0
\end{aligned}$$

同理亦有 $f(-K)<0$。所以 $f(x)$ 在 $-K<x<K$ 上至少有一個根。

2 Sturm 定理

設 $f(x)$ 是一個實系數多項式，$[a,b]$ 是一個給定區間。是否有一個有效能算的判定法，可以確定 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中實根的個數（不計重數）？這是在整個實系數多項式理論及應用上一個至關重要的基本問題。本節所証明的 Sturm 定理，提供了上述基本問題的完美解答。

若 $f(x)$ 含有重根，則其重根都含于 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的最高公因式 $d(x)$ 之中，而且 $\tilde{f}(x)=f(x)/d(x)$ 含有和 $f(x)$ 同樣的根，但是不含重數。所以在研討上述問題時不妨設 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 互素 (relatively prime)。令 $f_0(x)=f(x),f_1(x)=f'(x)$ 然後由 $f_0(x),f_1(x)$ 的輾轉相除，求得下述一串餘式 $f_2(x),f_3(x),\cdots,f_k(x)$，即有

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= q_1(x)f_1(x)-f_2(x)\\
f_1(x) &= q_2(x)f_2(x)-f_3(x)\\
\vdots\ &\quad\ \vdots\qquad\quad \vdots\\
f_{k-2}(x) &= q_{k-1}(x)f_{k-1}(x)-f_k(x)
\end{aligned}$$

注意：上述除式中的餘式帶有負號，所以 $f_2(x), f_3(x), \cdots, f_k(x)$ 乃是通常的輾轉相除中所得的餘式再乘以 (-1)。再者由所設 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 互素，所以 $f_k(x)$ 其實是一個非零常數。

上述函數串 $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}$ 叫做 Sturm 函數串。

【Sturm 定理】：$f(x)$ 在區間 (a, b) 之內的根的個數等于 $V(b) - V(a)$，其中 $V(a)$ 和 $V(b)$ 分別是下列數串 $\{f_0(a), f_1(a), f_2(a), \cdots, f_k(a)\}$ 和 $\{f_0(b), f_1(b), f_2(b), \cdots, f_k(b)\}$ 的變號數。

[註] 對于任給一數 c，不可能有相鄰的 $f_i(c)$ 和 $f_{i+1}(c)$ 同時為 0。不然，則由上述除式即可逐步推導得 $f_j(c) = 0, i \leq j \leq k$。但是 $f_k(x)$ 是一個非零常數！再者，設有 $f_i(c) = 0,\ 0 < i < k$，則由除式可見 $f_{i-1}(c) = -f_{i+1}(c) \neq 0$。所以不論把 $f_i(c)$ 想成 $+$ 或 $-$，數串 $\{f_i(c), 0 \leq i \leq k\}$ 的變號數是一樣的。由此可見在 c 不是 $f(x)$ 的一個根時，$V(c)$ 是唯一確定的。

証明：若區間 $[c_1, c_2]$ 中不含有任何 $f_i(x)$ 的根 $0 \leq i \leq k$，則由定理一可知 $f_i(c_1)$ 和 $f_i(c_2)$，$0 \leq i \leq k$，每一對皆為同號。因此 $V(c_1)$ 當然和 $V(c_2)$ 相同。

(i) 設 c 是其中一個 $f_i(x), 0 < i < k$ 的根。則有 $f_{i-1}(c) = -f_{i+1}(c) \neq 0$ 是異號的。再者，在 $\delta > 0$ 取得足夠小時，$f_{i-1}(c \pm \delta)$ 和 $f_{i-1}(c)$ 同號，$f_{i+1}(c \pm \delta)$ 和 $f_{i+1}(c)$ 同號，所以 $f_{i-1}(c \pm \delta)$ 和 $f_{i+1}(c \pm \delta)$ 異號，如下圖表所示，

	$c-\delta$	c	$c+\delta$
f_{i-1}	$\pm$	$\pm$	$\pm$
f_i	$+$ 或 $-$	0	$+$ 或 $-$
f_{i+1}	$\mp$	$\mp$	$\mp$

不論 $f_i(c \pm \delta)$ 的正、負，在 $\{f_{i-1}, f_i, f_{i+1}\}$ 這一段所含的變號數總是 1。

(ii) 設 c 是 $f_0(x) = f(x)$ 的一個根。則由無重根之所設 $f_1(c) = f'(c) \neq 0$，而且在 $\delta > 0$ 取得足夠小時，$f_1(x)$ 在區間 $[c - \delta, c + \delta]$ 上保持其正、負不變，亦即 $f_0(x) = f(x)$ 在 $[c - \delta, c + \delta]$ 上保持其遞增、遞減性不變

。由此可見，$\{f_0, f_1\}$ 在 $[c-\delta, c+\delta]$ 上的符號如下表所示：

	$c-\delta$	c	$c+\delta$
f_0	$\mp$	0	$\pm$
f_1	$\pm$	$\pm$	$\pm$

由上表可見 $\{f_0, f_1\}$ 這一段所含的變號數在 c 的左側為 1 但是在 c 的右側則是 0。

總結上面對于變號數的逐段局部分析如下：

設區間 $[a,b]$ 中所知的 $f(x)$ 的根的個數為 k，它們把 $[a,b]$ 分割成 $(k+1)$ 個區間，在每一分段上變號數 V 保持不變，但是從 $f(x)$ 的一個根的左側到其右側，則變號數 V 減 1。這也就証明了

$$V(b) = V(a) - k$$

亦即

$$k = V(a) - V(b)\,. \qquad \square$$

3 代數基本定理

在實數系的範圍中，一個像 x^2+1 這樣簡單的多項式已經是沒有它的根了。當年把實數系擴充到複數系 $\mathbb{C} = \{x+iy,\ x,y \in \mathbb{R}\}$ 至少使得所有二次方程式都有複數解，接著發現所有三次、四次方程式的根也都已經在複數範圍之內。很自然會問，是否任何高次方程式的根也都在複數系之內呢？還是會有些高次方程式在複數系中依然無解呢？是耶非耶，這就是當年 Euler、Lagrange 他們想解答的一個代數學基本問題。其答案是任何高次複系數多項式都存在有複數根，然後很容易用餘式定理歸納地証明它的所有根都已經在複數系之中。這就是高斯所証明的<u>代數基本定理</u> (Fundamental Theorem of Algebra)。

這個定理有好幾個不同的証法。下面所給者是一個比較初等而且証明中所涉的步驟又是十分簡樸直觀的証法。

當 $f(z)$ 的次數 ≤ 2 時，定理顯然成立，所以我們設 $f(z)$ 的次數 ≥ 3。

令 $F(z)=|f(z)|^2=f(z)\cdot\overline{f(z)}, z=x+iy$。則 $F(z)=|f(z)|^2\geq 0$ 可以想成一個二元連續函數，亦即當 $a_n\to x_0, b_n\to y_0$（亦即 $a_n+ib_n\to x_0+iy_0$）則恆有 $F(a_n+ib_n)\to F(x_0+iy_0)$。

把 F 的變域限制到

$$\square(2K,2K)=\{(x,y),|x|\leq K,|y|\leq K\}$$

我們將用實數系的連續性去証明 F 在 $\square(2K,2K)$ 的函數值中有一個極小值，亦即存在 $\square(2K,2K)$ 中一點 (x_0,y_0) 使得

$$F(x_0,y_0)\leq F(x,y),\quad (x,y)\in\square(2K,2K)$$

恆成立。

[設想]：假如 $\square(2K,2K)$ 業已大到包括我們所要証明其存在的 $f(z)$ 的一個根的話，則上述極小值必須是 0，而 x_0+iy_0 就是 $f(z)$ 的一個根。由此可見，代數基本定理証明的要點在于論証 當 K 足夠大時，上述極小值必須等于 0。

【引理一】：F 在 $\square(2K,2K)$ 上的所有函數值中，存在有一個極小值，亦即存在 $(x_0,y_0)\in\square(2K,2K)$ 使得

$$F(x_0,y_0)\leq F(x,y)$$

對所有 $|x|\leq K,|y|\leq K$ 皆成立。

証明：令 $\mathcal{S}$ 為 F 在 $\square(2K,2K)$ 上所取的所有函數值所成的集合。以 $g.l.b.(\mathcal{S})$ 表示 $\mathcal{S}$ 的極大下限 (greatest lower bound)。

[注意]：一個具有下限的實數子集 $\mathcal{S}$ 總是有一個極大下限的。但是這個 $\mathcal{S}$ 的極大下限卻不一定屬于 $\mathcal{S}$；若屬于 $\mathcal{S}$，則它當然就是 $\mathcal{S}$ 的極小者。

把 $\square(2K,2K)$ 等分成四個 $\square(K,K)$（每個都包含其邊界）。令 $\mathcal{S}_i$ 是函數下在各別方塊上函數值的集合，$i=1,2,3,4$。因為 $\mathcal{S}$ 的最大下限等于 $\mathcal{S}_i$ 的最大下限之中的最小者，所以至少有一個 $\mathcal{S}_i$ 的最大下限等于 $\mathcal{S}$ 的最大下限。設其所相應的方塊是 $\square_1$，我們又可以把 $\square_1$ 等分成四個

方塊而選取其中之一 $\square_2$，使得 F 在 $\square_2$ 上的函數值的最大下限還是等于 F 在 $\square(2K,2K)$ 上的函數值極大下界。如此逐步四等分，而每次選擇其中之一，使得 F 在其上函數值的最大下限依然和 F 在 $\square(2K,2K)$ 上者相等，這樣就得到「方塊列」

$$\square(2K,2K)\supset\square_1\supset\square_2\supset\cdots\supset\square_n\supset\square_{n+1}\supset\cdots$$

F 在 $\square_n$ 上的函數值的最大下限一直和 F 在 $\square(2K,2K)$ 上者相等。再者，由上述逐次四等分然後選取其中之一這種幾何構造法，可見有兩對左、右夾逼實數數列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 和 $\{c_n\},\{d_n\}$ 使得

$$\square_n=\{(x,y);\, a_n\le x\le b_n,\, c_n\le y\le d_n\}$$

在此，我們運用實數系的連續性即得

$$\begin{aligned}x_0&=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n\\ y_0&=\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}d_n\end{aligned}$$

然後，再用 F 的連續性去証明

$$\begin{aligned}&F(x_0,y_0)=g.l.b.(\mathcal{S})\\ &\Rightarrow F(x_0,y_0)\text{ 是 }\mathcal{S}\text{ 中的極小者}\end{aligned}$$

我們將用反証法來証明 $F(x_0,y_0)=g.l.b.(\mathcal{S})$。假若不然，令

$$F(x_0,y_0)-g.l.b.(\mathcal{S})=2\varepsilon$$

則用 F 在 (x_0,y_0) 點的連續性，即有一個足夠小的 $\delta>0$，使得

$$\begin{aligned}&|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\\ &\Rightarrow |F(x,y)-F(x_0,y_0)|<\varepsilon\end{aligned}$$

再者，當 n 足夠大時，即有

$$|a_n-x_0|,\ |b_n-x_0|,\ |c_n-y_0|,\ |d_n-y_0|$$

都小于 δ，亦即整個 $\square_n$ 都包含在

$$|x-x_0|<\delta\ \text{ 和 }\ |y-y_0|<\delta$$

這個方塊之內，所以 F 在 $\square_n$ 上的函數值都大于

$$F(x_0, y_0) - \varepsilon = g.l.b.(\mathcal{S}) + \varepsilon$$

這顯然和 $\square_n$ 的選取是使得 F 在其上函數值的最大下限等于 $g.l.b.(\mathcal{S})$ 相矛盾。所以 $F(x_0, y_0)$ 必須等于 $g.l.b.(\mathcal{S})$，亦即 $F(x_0, y_0)$ 就是 F 在 $\square(2K, 2K)$ 上的<u>極小值</u>。 $\square$

[注意]：在上述証明中，其實僅僅用到 F 的連續性和 F 的下限性（$F \geq 0$）。

在定理的証明中，不妨設 $f(z)$ 的首項系數為 1，即

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n$$

令

$$\begin{aligned} M &= \operatorname{Max}\{|c_i|,\, 1 \leq i \leq n\} \\ K &> 2(M+2) \end{aligned}$$

當我們把 z 限制在 $\square(2K, 2K)$ 的邊界上時，

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |z|^n \cdot \left|1 + c_1 \frac{1}{z} + \cdots + c_n \frac{1}{z^n}\right| \\ &\geq |z|^n \big\{1 - M\big(\frac{1}{|z|} + \cdots + \frac{1}{|z|^n}\big)\big\} \\ &\geq K^n \big\{1 - \frac{M}{2M+3}\big\} \\ &\geq [2(M+2)]^n \cdot \frac{M+3}{2M+3} > |c_n| = |f(0)| \end{aligned}$$

由此可見 F 在 $\square(2K, 2K)$ 上的極小點 (x_0, y_0) 不可能位于其邊界之上，亦即 (x_0, y_0) 必定是一個內點。

【引理二】：當 $|f(z)|$ 在 $\square(2K, 2K)$ 上的極小值發生于 $\square(2K, 2K)$ 的一個內點 $z_0 = x_0 + iy_0$ 時，$|f(z_0)| = 0$，亦即 $f(z_0) = 0$。

<u>証明</u>：我們將用反証法，設 $f(z_0) = w_0 \neq 0$ 然後去証明一定有 $\square(2K, 2K)$ 中的另外一點 z_1 使得 $|f(z_1)| < |f(z_0)|$。

因為 z_0 是 $\square(2K,2K)$ 的一個內點。所以以 z_0 為圓心的一個足夠小半徑的圓依然位于 $\square(2K,2K)$ 之內。其上之點可以表成

$$z = z_0 + \rho e^{i\theta}, \quad \rho \text{ 是半徑}, \quad e^{i\theta} \text{ 定義為 } \cos\theta + i\sin\theta$$

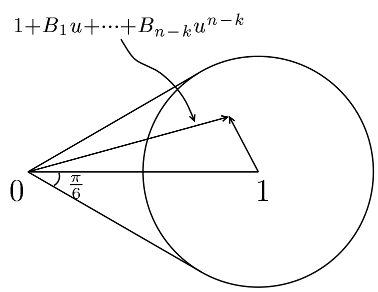
再者，以 $z = z_0 + u$ 代入 $f(z)$ 然後再以 u 的升冪表達，即有

$$f(z) = f(z_0) + A \cdot u^k \{1 + B_1 u + B_2 u^2 + \cdots + B_{n-k} u^{n-k}\}$$

令 $M' = \mathrm{Max}\,\{|B_i|, 1 \leq i \leq n-k\}$，取 $\rho < \dfrac{1}{2(M+2)}$，則有

$$\begin{aligned} &\left|B_1 u + B_2 u^2 + \cdots B_{n-k} u^{n-k}\right|, \quad u = \rho e^{i\theta} \\ \leq\ & M' \cdot \{\rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{n-k}\} \\ \leq\ & \frac{M'}{2M'+3} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

由 [圖–2] 可見 $\{1 + B_1 u + \cdots + B_{n-k} u^{n-k}\}$ 的幅角 φ 必然介于 $\pm\dfrac{\pi}{6}$ 之間



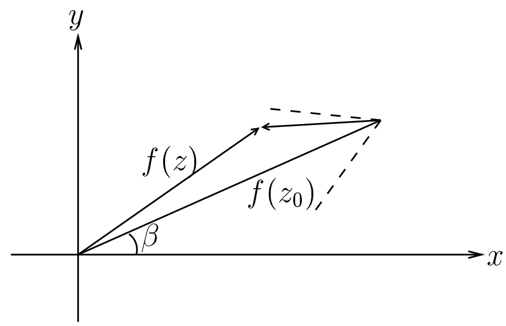
[圖–2]

設 A 的幅角為 α，則

$$Au^k \cdot \{1 + B_1 u + \cdots + B_{n-k} u^{n-k}\}, \quad u = \rho e^{i\theta}$$

的幅角等于

$$\alpha + k\theta + \varphi, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{6}$$



[圖–3]

設 $f(z_0)$ 的幅角為 β。取

$$\theta = \frac{\pi + \beta - \alpha}{k}$$

則有

$$\alpha + k\theta + \varphi = \pi + \beta + \varphi, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{6}$$

由 [圖–3] 易見 $f(z) - f(z_0)$ 的方向夾在 $\pi + \beta \pm \dfrac{\pi}{6}$ 之間，所以 $|f(z)| < |f(z_0)|$，和所設 $|f(z_0)|$ 是極小相矛盾。這也就証明了 $|f(z_0)|$ 必須是 0，亦即 z_0 乃是 $f(z)$ 的一個根！