实数系连续性的几个应用范例

项武义*

我们可以从实数和长度度量的密切关联认识到实数系的连续性和直线连续不断的直观内含之间的对应关系，即前者乃是後者的解析描述 (analytical formulation)。直线是连续不断的，但是切去其任给一点即断成两段是直观至为明显者，但是直观是无法用来作为研讨其他各种各样连续性的依据的。而一对左、右夹逼数列的共同极限的存在性，则是一个明确严谨的解析描述。它把直观明显的直线连续现象，转化为便于用来解析论证，研讨其他各种各样连续性，例如曲线的连续性、函数的连续性等等的基础。

1 函数的连续性和连续函数的中间值定理

从直观上来看，一个定义在闭线段 $[a,b]=\{x;a\le x\le b\}$ 上的实变、实值函数 $y=f(x)$ 是一个「连续函数」应该和其图像曲线：

$$\Gamma(f)=\{(x,f(x);a\le x\le b\}$$

为一条「连续曲线」是一回事。但是一条曲线的连续性又如何去判定呢？一种自然的说法是：一条曲线 γ 乃是一个「动点」的轨迹，而动点者也，乃是一个位置随时间而变动的点，它的解析描述就是其 x,y 坐标分别是时间 t 函数，即

$$\gamma:\quad x=f(t),\ y=g(t),\quad a\le t\le b$$

通常称之为曲线 γ 的参数表示 (parametric representation of a curve γ)。例如图像 $\Gamma(f)$ 的一种参数表示就是：

$$\Gamma:\quad x=t,\ y=f(t)$$

*香港科技大学数学系

单位圆的一种参数表示是：

$$x = \cos t,\ y = \sin t$$

椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的一种参数表示是：

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$$

其实，在几何中连续曲线的定义乃是它的参数表示中那一对函数都是连续函数。所以归根究底，我们必须先对函数的连续性给以解析的定义。

一个函数关系所描述的是因变量 y 随著自变量 x 的取定而如何确定其相应之值，亦即函数值 y 的变化如何由自变数 x 的变化从而确定。连续函数的直观内含是当 x「连续变化」时，y 也随著「连续变化」，亦即当 x 作微小的改变时，相应的 y 的改变也必然是微小的。把上述直观内含给以严谨的解析描述，即为下述函数连续性的定义。先定义函数在一个点 $x = x_0$ 的连续性。

【定义】：$y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 的连续性定义为：对于任给正数 $\varepsilon > 0$，皆有另一足够小的 $\delta > 0$ 使得

$$|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

[亦即，只要 x 和 x_0 的差别足够小，则其相应函数值 $f(x)$ 和 $f(x_0)$ 就可以小到任意小。]

若把上述局部连续性的定义和数列极限的定义结合起来，即有

$$a_n \to x_0 \ \Rightarrow\ f(a_n) \to f(x_0)$$

亦即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f\big(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\big)$。

【定义】：一个函数 $y = f(x)$ 的全局连续性也就是它在其定义域上每个点皆满足上述局部连续性。

【例子】：

(1) 多项式函数如 $y = x^2, y = x^n, y = (3x+1)(x^2-1)$ 等等都是到处连续的。

(2) $y = e^x$ 是到处连续的。

(3) $y = \cos x, y = \sin x$ 也是到处连续的。

【习题】：

(1) 试证 $y = \sin x$ 在 $x = 0$ 点的局部连续性。

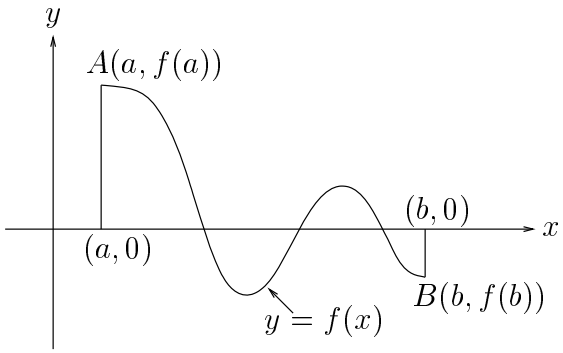
(2) 试证 $y = \cos x$ 在 $x = 0$ 点的局部连续性。

(3) 试证 $y = \sin x$ 的全局连续性。

(4) 试证 $y = \cos x$ 的全局连续性。

【定理一】：设 $y = f(x)$ 是定义在 $a \le x \le b$ 上的连续函数，而且 $f(a) \cdot f(b) < 0$（亦即 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号），则必存在有 $a < x_0 < b$ 使得 $f(x_0) = 0$。

证明：直观地来说，$y = f(x)$ 的图像曲线是一条连结 $A = (a, f(a))$ 和 $B = (b, f(b))$ 两点之间的连续曲线，而 A、B 是分居于直线 $y = 0$（x–轴）的两侧的（因为 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号）。所以由直观来看，它必须要和 x–轴至少相交于一点。这也就是我们所要证的，而证明的依据当然就是实数的连续性和函数的连续性的解析描述。



[图–1]

证明的基本想法是由所给的连续函数 $f(x)$ 去逐步构造我们所要论证其存在的那个使得 $f(x_0)=0$ 的点 x_0 的一对左、右夹逼数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$。其构造如下：

令 $a_1=a, b_1=b$。若 $f\big(\frac{a_1+b_1}{2}\big)=0$ 则 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 即为所求的 x_0，自然就不必再去构造了。不然，则 $f\big(\frac{a_1+b_1}{2}\big)$ 和 $f(a_1), f(b_1)$ 之中一个同号，另一个异号。若它和 $f(a_1)$ 同号，则令 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}, b_2=b_1$；若它和 $f(b_1)$ 同号，则令 $a_2=a_1, b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$。总之，上述取法确保了 $f(a_2)\cdot f(b_2)<0$。

以同样的选取法由 (a_2,b_2) 去构造 (a_3,b_3)，再由 (a_3,b_3) 去构造 (a_4,b_4)，...，由 (a_n,b_n) 去构造 (a_{n+1},b_{n+1})。当然，在 $f\big(\frac{a_n+b_n}{2}\big)=0$ 时，则 $x_0=\frac{a_n+b_n}{2}$ 即为所求，也就不必再去构造了。在这种情形一直不发生时，上述逐步构造就得出一对数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，前者递增而後者递减，而且 $b_n-a_n=\big(\frac{1}{2}\big)^{n-1}(b-a)\to 0$，所以是一对左、右夹逼数列。再者，由于上述逐步选取中，我们始终确保了 $f(a_n)\cdot f(b_n)<0$ 这个条件。

由实数系的连续性得知存在 x_0 介于所有的 a_n, b_n 之间，亦即

$$x_0=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$$

再由 $f(x)$ 在 x_0 点的连续性，即有

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(a_n),\quad f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)$$
$$f(x_0)^2=\lim_{n\to\infty}f(a_n)\cdot f(b_n)\le 0\ \Rightarrow\ f(x_0)=0$$

[因为 $f(a_n)\cdot f(b_n)<0$，所以其极限不可能 >0！] □

【推论一】（中间值定理）：设 $y=f(x)$ 是在 $a\le x\le b$ 上的连续函数，c 是介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一个数，亦即 $\big(f(a)-c\big)\big(f(b)-c\big)<0$，则必存在 $a\le x_0\le b$ 使得 $f(x_0)=c$。

[证明] 显然 $y = f(x) - c$ 也是在 $a \le x \le b$ 上的连续函数。对它直接运用定理一，即得 $f(x_0) - c = 0$。

【推论二】：设多项式 $f(x)$ 在 a、b 两点之值异号，则 $f(x)$ 在 a、b 之间至少有一个根。

【推论三】：设 $f(x)$ 是一个奇次多项式，则 $f(x)$ 至少有一个实根。

[证明] 不妨设 $f(x)$ 的首项系数是 1，即

$$f(x) = x^{2k+1} + c_1 x^{2k} + c_2 x^{2k-1} + \cdots + c_{2k+1}$$

令 $M = \mathrm{Max}\{|c_i|, 1 \le i \le 2k+1\}$。设 $K > 2(M+2)$ 则有

$$\begin{aligned} f(K) &= K^{2k+1}\Big\{1 + c_1\frac{1}{K} + c_2\frac{1}{K^2} + \cdots + c_{2k+1}\frac{1}{K^{2k+1}}\Big\} \\ &\ge K^{2k+1}\Big\{1 - M\cdot[\frac{1}{K} + \frac{1}{K^2} + \cdots + \frac{1}{K^{2k+1}}]\Big\} \\ &\ge K^{2k+1}\Big\{1 - \frac{M}{2M+3}\Big\} > 0 \end{aligned}$$

同理亦有 $f(-K) < 0$。所以 $f(x)$ 在 $-K < x < K$ 上至少有一个根。

2 Sturm 定理

设 $f(x)$ 是一个实系数多项式，$[a,b]$ 是一个给定区间。是否有一个有效能算的判定法，可以确定 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中实根的个数（不计重数）？这是在整个实系数多项式理论及应用上一个至关重要的基本问题。本节所证明的 Sturm 定理，提供了上述基本问题的完美解答。

若 $f(x)$ 含有重根，则其重根都含于 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的最高公因式 $d(x)$ 之中，而且 $\tilde{f}(x) = f(x)/d(x)$ 含有和 $f(x)$ 同样的根，但是不含重数。所以在研讨上述问题时不妨设 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 互素 (relatively prime)。令 $f_0(x) = f(x), f_1(x) = f'(x)$ 然後由 $f_0(x), f_1(x)$ 的辗转相除，求得下述一

串馀式 $f_2(x), f_3(x), \cdots, f_k(x)$，即有

$$\begin{aligned} f_0(x) &= q_1(x)f_1(x) - f_2(x) \\ f_1(x) &= q_2(x)f_2(x) - f_3(x) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ f_{k-2}(x) &= q_{k-1}(x)f_{k-1}(x) - f_k(x) \end{aligned}$$

注意：上述除式中的馀式带有负号，所以 $f_2(x), f_3(x), \cdots, f_k(x)$ 乃是通常的辗转相除中所得的馀式再乘以 (-1)。再者由所设 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 互素，所以 $f_k(x)$ 其实是一个非零常数。

上述函数串 $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}$ 叫做 Sturm 函数串。

【Sturm 定理】：$f(x)$ 在区间 (a, b) 之内的根的个数等于 $V(b) - V(a)$，其中 $V(a)$ 和 $V(b)$ 分别是下列数串 $\{f_0(a), f_1(a), f_2(a), \cdots, f_k(a)\}$ 和 $\{f_0(b), f_1(b), f_2(b), \cdots, f_k(b)\}$ 的变号数。

[注] 对于任给一数 c，不可能有相邻的 $f_i(c)$ 和 $f_{i+1}(c)$ 同时为 0。不然，则由上述除式即可逐步推导得 $f_j(c) = 0, i \le j \le k$。但是 $f_k(x)$ 是一个非零常数！再者，设有 $f_i(c) = 0, 0 < i < k$，则由除式可见 $f_{i-1}(c) = -f_{i+1}(c) \neq 0$。所以不论把 $f_i(c)$ 想成 $+$ 或 $-$，数串 $\{f_i(c), 0 \le i \le k\}$ 的变号数是一样的。由此可见在 c 不是 $f(x)$ 的一个根时，$V(c)$ 是唯一确定的。

证明：若区间 $[c_1, c_2]$ 中不含有任何 $f_i(x)$ 的根 $0 \le i \le k$，则由定理一可知 $f_i(c_1)$ 和 $f_i(c_2)$，$0 \le i \le k$，每一对皆为同号。因此 $V(c_1)$ 当然和 $V(c_2)$ 相同。

(i) 设 c 是其中一个 $f_i(x), 0 < i < k$ 的根。则有 $f_{i-1}(c) = -f_{i+1}(c) \neq 0$ 是异号的。再者，在 $\delta > 0$ 取得足够小时，$f_{i-1}(c \pm \delta)$ 和 $f_{i-1}(c)$ 同号，$f_{i+1}(c \pm \delta)$ 和 $f_{i+1}(c)$ 同号，所以 $f_{i-1}(c \pm \delta)$ 和 $f_{i+1}(c \pm \delta)$ 异号，如下图表所示，

	$c-\delta$	c	$c+\delta$
f_{i-1}	$\pm$	$\pm$	$\pm$
f_i	$+$ 或 $-$	0	$+$ 或 $-$
f_{i+1}	$\mp$	$\mp$	$\mp$

不论 $f_i(c\pm\delta)$ 的正、负，在 $\{f_{i-1}, f_i, f_{i+1}\}$ 这一段所含的变号数总是 1。

(ii) 设 c 是 $f_0(x) = f(x)$ 的一个根。则由无重根之所设 $f_1(c) = f'(c) \neq 0$，而且在 $\delta > 0$ 取得足够小时，$f_1(x)$ 在区间 $[c-\delta, c+\delta]$ 上保持其正、负不变，亦即 $f_0(x) = f(x)$ 在 $[c-\delta, c+\delta]$ 上保持其递增、递减性不变。由此可见，$\{f_0, f_1\}$ 在 $[c-\delta, c+\delta]$ 上的符号如下表所示：

	$c-\delta$	c	$c+\delta$
f_0	$\mp$	0	$\pm$
f_1	$\pm$	$\pm$	$\pm$

由上表可见 $\{f_0, f_1\}$ 这一段所含的变号数在 c 的左侧为 1 但是在 c 的右侧则是 0。

总结上面对于变号数的逐段局部分析如下：

设区间 $[a, b]$ 中所知的 $f(x)$ 的根的个数为 k，它们把 $[a, b]$ 分割成 $(k+1)$ 个区间，在每一分段上变号数 V 保持不变，但是从 $f(x)$ 的一个根的左侧到其右侧，则变号数 V 减 1。这也就证明了

$$V(b) = V(a) - k$$

亦即

$$k = V(a) - V(b)\,. \qquad \square$$

3 代数基本定理

在实数系的范围中，一个像 x^2+1 这样简单的多项式已经是没有它的根了。当年把实数系扩充到复数系 $\mathbb{C} = \{x+iy, x, y \in \mathbb{R}\}$ 至少使得所有二次方程式都有复数解，接著发现所有三次、四次方程式的根也都已经在复数范围之内。很自然会问，是否任何高次方程式的根也都在复数系之内呢？还是会有些高次方程式在复数系中依然无解呢？是耶非耶，这就是当年 Euler、Lagrange 他们想解答的一个代数学基本问题。其答案是任何高次复系数多项式都存在有复数根，然後很容易用馀式定理归纳地证明它的所有根都已经在复数系之中。这就是高斯所证明的代数基本定理 (Fundamental Theorem of Algebra)。

这个定理有好几个不同的证法。下面所给者是一个比较初等而且证明中所涉的步骤又是十分简朴直观的证法。

当 $f(z)$ 的次数 ≤ 2 时，定理显然成立，所以我们设 $f(z)$ 的次数 ≥ 3。

令 $F(z) = |f(z)|^2 = f(z)\cdot\overline{f(z)}, z = x+iy$。则 $F(z) = |f(z)|^2 \geq 0$ 可以想成一个二元连续函数，亦即当 $a_n \to x_0, b_n \to y_0$（亦即 $a_n+ib_n \to x_0+iy_0$）则恒有 $F(a_n + ib_n) \to F(x_0 + iy_0)$。

把 F 的变域限制到

$$\square(2K, 2K) = \{(x, y), |x| \leq K, |y| \leq K\}$$

我们将用实数系的连续性去证明 F 在 $\square(2K, 2K)$ 的函数值中有一个极小值，亦即存在 $\square(2K, 2K)$ 中一点 (x_0, y_0) 使得

$$F(x_0, y_0) \leq F(x, y), \quad (x, y) \in \square(2K, 2K)$$

恒成立。

[设想]：假如 $\square(2K, 2K)$ 业已大到包括我们所要证明其存在的 $f(z)$ 的一个根的话，则上述极小值必须是 0，而 $x_0 + iy_0$ 就是 $f(z)$ 的一个根。由此可见，代数基本定理证明的要点在于论证当 K 足够大时，上述极小值必须等于 0。

【引理一】：F 在 $\square(2K, 2K)$ 上的所有函数值中，存在有一个极小值，亦即存在 $(x_0, y_0) \in \square(2K, 2K)$ 使得

$$F(x_0, y_0) \leq F(x, y)$$

对所有 $|x| \leq K, |y| \leq K$ 皆成立。

证明：令 $\mathcal{S}$ 为 F 在 $\square(2K, 2K)$ 上所取的所有函数值所成的集合。以 $g.l.b.(\mathcal{S})$ 表示 $\mathcal{S}$ 的极大下限 (greatest lower bound)。

[注意]：一个具有下限的实数子集 $\mathcal{S}$ 总是有一个极大下限的。但是这个 $\mathcal{S}$ 的极大下限却不一定属于 $\mathcal{S}$；若属于 $\mathcal{S}$，则它当然就是 $\mathcal{S}$ 的极小者。

把 $\square(2K,2K)$ 等分成四个 $\square(K,K)$（每个都包含其边界）。令 $\mathcal{S}_i$ 是函数下在各别方块上函数值的集合，$i=1,2,3,4$。因为 $\mathcal{S}$ 的最大下限等于 $\mathcal{S}_i$ 的最大下限之中的最小者，所以至少有一个 $\mathcal{S}_i$ 的最大下限等于 $\mathcal{S}$ 的最大下限。设其所相应的方块是 $\square_1$，我们又可以把 $\square_1$ 等分成四个方块而选取其中之一 $\square_2$，使得 F 在 $\square_2$ 上的函数值的最大下限还是等于 F 在 $\square(2K,2K)$ 上的函数值极大下界。如此逐步四等分，而每次选择其中之一，使得 F 在其上函数值的最大下限依然和 F 在 $\square(2K,2K)$ 上者相等，这样就得到「方块列」

$$\square(2K,2K)\supset\square_1\supset\square_2\supset\cdots\supset\square_n\supset\square_{n+1}\supset\cdots$$

F 在 $\square_n$ 上的函数值的最大下限一直和 F 在 $\square(2K,2K)$ 上者相等。再者，由上述逐次四等分然後选取其中之一这种几何构造法，可见有两对左、右夹逼实数数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 和 $\{c_n\},\{d_n\}$ 使得

$$\square_n=\{(x,y);\,a_n\le x\le b_n,\,c_n\le y\le d_n\}$$

在此，我们运用实数系的连续性即得

$$\begin{aligned}x_0&=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n\\ y_0&=\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}d_n\end{aligned}$$

然後，再用 F 的连续性去证明

$$\begin{aligned}&F(x_0,y_0)=g.l.b.(\mathcal{S})\\ &\Rightarrow F(x_0,y_0)\text{ 是 }\mathcal{S}\text{ 中的极小者}\end{aligned}$$

我们将用反证法来证明 $F(x_0,y_0)=g.l.b.(\mathcal{S})$。假若不然，令

$$F(x_0,y_0)-g.l.b.(\mathcal{S})=2\varepsilon$$

则用 F 在 (x_0,y_0) 点的连续性，即有一个足够小的 $\delta>0$，使得

$$\begin{aligned}&|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\\ &\Rightarrow|F(x,y)-F(x_0,y_0)|<\varepsilon\end{aligned}$$

再者，当 n 足够大时，即有

$$|a_n - x_0|,\ |b_n - x_0|,\ |c_n - y_0|,\ |d_n - y_0|$$

都小于 δ，亦即整个 $\square_n$ 都包含在

$$|x - x_0| < \delta \ \text{和}\ |y - y_0| < \delta$$

这个方块之内，所以 F 在 $\square_n$ 上的函数值都大于

$$F(x_0, y_0) - \varepsilon = g.l.b.(\mathcal{S}) + \varepsilon$$

这显然和 $\square_n$ 的选取是使得 F 在其上函数值的最大下限等于 $g.l.b.(\mathcal{S})$ 相矛盾。所以 $F(x_0, y_0)$ 必须等于 $g.l.b.(\mathcal{S})$，亦即 $F(x_0, y_0)$ 就是 F 在 $\square(2K, 2K)$ 上的极小值。 □

[注意]：在上述证明中，其实仅仅用到 F 的连续性和 F 的下限性（$F \geq 0$）。

在定理的证明中，不妨设 $f(z)$ 的首项系数为 1，即

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n$$

令

$$M = \operatorname{Max}\{|c_i|,\ 1 \leq i \leq n\}$$
$$K > 2(M + 2)$$

当我们把 z 限制在 $\square(2K, 2K)$ 的边界上时，

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |z|^n \cdot \left|1 + c_1 \frac{1}{z} + \cdots + c_n \frac{1}{z^n}\right| \\ &\geq |z|^n \Big\{1 - M\Big(\frac{1}{|z|} + \cdots + \frac{1}{|z|^n}\Big)\Big\} \\ &\geq K^n \Big\{1 - \frac{M}{2M + 3}\Big\} \\ &\geq [2(M + 2)]^n \cdot \frac{M + 3}{2M + 3} > |c_n| = |f(0)| \end{aligned}$$

由此可见 F 在 $\square(2K,2K)$ 上的极小点 (x_0,y_0) 不可能位于其边界之上，亦即 (x_0,y_0) 必定是一个内点。

【引理二】：当 $|f(z)|$ 在 $\square(2K,2K)$ 上的极小值发生于 $\square(2K,2K)$ 的一个内点 $z_0=x_0+iy_0$ 时，$|f(z_0)|=0$，亦即 $f(z_0)=0$。

证明：我们将用反证法，设 $f(z_0)=w_0\neq 0$ 然後去证明一定有 $\square(2K,2K)$ 中的另外一点 z_1 使得 $|f(z_1)|<|f(z_0)|$。

因为 z_0 是 $\square(2K,2K)$ 的一个内点。所以以 z_0 为圆心的一个足够小半径的圆依然位于 $\square(2K,2K)$ 之内。其上之点可以表成

$$z=z_0+\rho e^{i\theta},\quad \rho \text{ 是半径},\quad e^{i\theta} \text{ 定义为 } \cos\theta+i\sin\theta$$

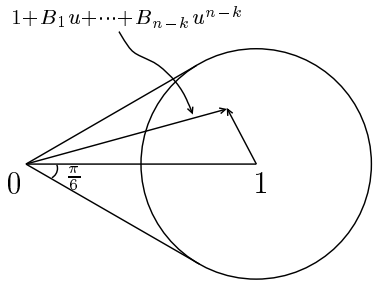
再者，以 $z=z_0+u$ 代入 $f(z)$ 然後再以 u 的升幂表达，即有

$$f(z)=f(z_0)+A\cdot u^k\{1+B_1u+B_2u^2+\cdots+B_{n-k}u^{n-k}\}$$

令 $M'=\operatorname{Max}\{|B_i|,\,1\le i\le n-k\}$，取 $\rho<\dfrac{1}{2(M+2)}$，则有

$$\begin{aligned}&\left|B_1u+B_2u^2+\cdots B_{n-k}u^{n-k}\right|,\quad u=\rho e^{i\theta}\\ &\le M'\cdot\{\rho+\rho^2+\cdots+\rho^{n-k}\}\\ &\le \frac{M'}{2M'+3}<\frac{1}{2}\end{aligned}$$

由 [图–2] 可见 $\{1+B_1u+\cdots+B_{n-k}u^{n-k}\}$ 的幅角 φ 必然介于 $\pm\dfrac{\pi}{6}$ 之间



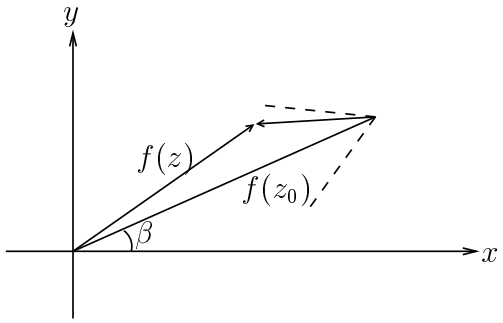
[图–2]

设 A 的幅角为 α，则

$$Au^k \cdot \{1 + B_1 u + \cdots + B_{n-k} u^{n-k}\}, \quad u = \rho e^{i\theta}$$

的幅角等于

$$\alpha + k\theta + \varphi, \quad |\varphi| \le \frac{\pi}{6}$$



[图–3]

设 $f(z_0)$ 的幅角为 β。取

$$\theta = \frac{\pi + \beta - \alpha}{k}$$

则有

$$\alpha + k\theta + \varphi = \pi + \beta + \varphi, \quad |\varphi| \le \frac{\pi}{6}$$

由 [图–3] 易见 $f(z) - f(z_0)$ 的方向夹在 $\pi + \beta \pm \frac{\pi}{6}$ 之间，所以 $|f(z)| < |f(z_0)|$，和所设 $|f(z_0)|$ 是极小相矛盾。这也就证明了 $|f(z_0)|$ 必须是 0，亦即 z_0 乃是 $f(z)$ 的一个根！