第 7 章

球面几何和球面三角学

球面乃是空间中最完美匀称的曲面。两个半径相等的球面可以用一个平移把它们叠合起来，而两个半径不相等的球面所相差者就是放大或缩小这种相似变换，由此可见本质性的球面几何可以归纳到单位半径的球面来研讨。再者，在古典天文学的研讨中，观察星星的方向可以用单位球面上的一个点来标记它，而两个方向之间的角度（亦即方向差）则相应于单位球面上两点之间的球面距离 (spherical distance)。这也就是为什麼古希腊天文学和几何学总是合为一体的，而且古希腊的几何学家对于球面三角学 (spherical trigonometry) 的投入程度要远远超过他们对于平面测量学的兴趣，因为「量天的学问」才是他们所致力去理解者；它的确比丈量土地、计量财产等更引人入胜，是不？

从现代的观点来看，球面几何乃是空间几何中蕴含在正交子群的部分，而向量几何则是空间几何中蕴含在平移子群的部分，而且两者又密切相关、相辅相成，例如向量运算都是正交协变的 (orthogonal covariant)，所以向量代数又是研讨球面几何的简明有力的利器。

7.1 单位球面的基本性质

设 O 为球面的心，而单位球面 $S^2(1)$ 则是空间 $\mathfrak{U}$ 中所有和 O 点的距离为 1 的点所成的点集，即：

$$S^2(1) = \{A \in \mathfrak{U}, \overline{OA} = 1\}$$

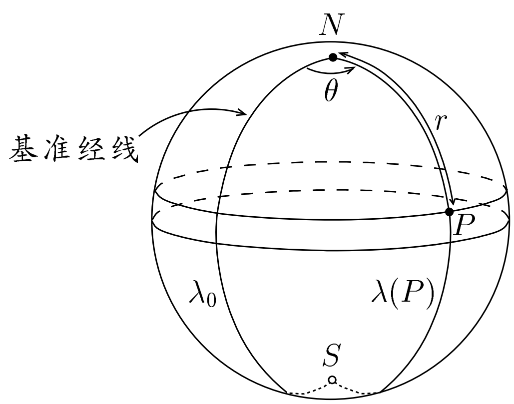
它是以 O 为其定点的正交子群的一个轨道 (orbit)。

(i) 反射对称性：设 Π 是一个过球心 O 点的平面，则显然有 $\mathfrak{R}_\Pi$ 保持 O 点不动。由 $\mathfrak{R}_\Pi$ 的保长性可见它把和 O 点相距为 1 的点变换成和 O 点相距为 1 之点，所以 $\mathfrak{R}_\Pi\big(S^2(1)\big) = S^2(1)$。再者，$\mathfrak{R}_\Pi$ 在 $S^2(1)$ 上的定点子集就是 $S^2(1) \cap \Pi$ 这一个大圆 (great circle)，我们将把 $\mathfrak{R}_\Pi$ 限制在 $S^2(1)$ 上的变换叫做以大圆 $S^2(1) \cap \Pi$ 为定点子集的球面反射对称。

(ii) 旋转对称性：设 ℓ 是一条过球心 O 点的直线，它和球面 $S^2(1)$ 的交点是球面上的两个互为对顶的点 A, A'（一如南、北两极）；换言之，球面上两点 A, A' 互为对顶 (antipodal) 的条件是 $\overline{AA'}$ 以球心为其中点。在空间以 ℓ 为轴的旋转之下，球心 $O \in \ell$ 是固定不动的；同理可见 $S^2(1)$ 也是它的一个不变子集，而它限制在球面上的变换乃是一个以对顶点 $\{A, A'\}$ 为其定点子集的球面旋转对称（如日常地球所作者就是一个以南北极为其定点子集的旋转）。

球面极坐标：

设 $\{N, S\}$ 是单位球面上给定的两个互相对顶之点，在以 $\{N, S\}$ 为定点子集的球面旋转之下，每点的「纬度」保持不变，而其「经度」则随著转角而增加，如 [图 7–1] 所示。设 P 是球面上相异于两个极点者，令 $\lambda(P)$ 是过 P 点的那条经线 (longitude arc)，λ_0 是选定的基准经线。设 r 为 N 到 P 的球面距离，亦即 $\overset{\frown}{NP}$ 这一段「经弧」的弧长，θ 是 λ_0 转到 $\lambda(P)$ 的（有向）转角，则称 (r, θ) 为 P 点对于以 N 为基点的球面极坐标 (spherical polar coordinates)。



[图 7–1]

若在空间选取正交坐标系，以球心为原点，以 $\overrightarrow{ON}$ 为 z–轴的方向，以 $\overrightarrow{OE}$ 为 x–轴的方向，其中 E 点乃是基准经线 λ_0 的中点，则有：

$$x = \sin r \cos\theta,\ y = \sin r \sin\theta,\ z = \cos r$$

[注]：由直接的微分计算可得

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + \sin^2 r d\theta^2$$

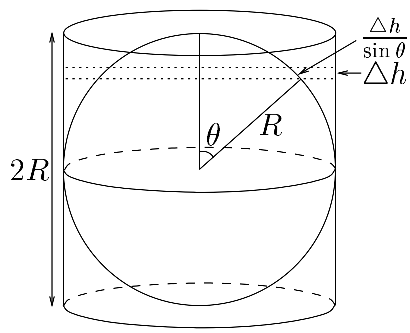
用上述弧长的微分式，不难证明经弧 $\overset{\frown}{NP}$ 乃是球面上连结 N, P 两点的最短曲线（亦称测地线 (geodesics)）。

【阿基米德定理】：半径为 R 的球面面积等于

$$4\pi R^2$$

[注]：阿基米德 (Archimedes, 287–212 B.C.) 是公认的古希腊时代伟大的科学家和几何学家，他一生有很多卓越的贡献；而他最引以自豪者，首推上述定理及其简洁的证明，这也就是尊照他本人的遗嘱刻在他的墓碑上者。

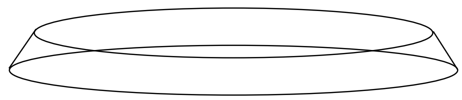
证明：其证明的要点在于论证一个半径为 R 的球面面积和一个高为 $2R$，半径为 R 的圆柱面面积相等。而在他的墓碑上所刻划的，就是如 [图 7–2] 所示把两者放在相切同高的位置。



[图 7–2]

设想用一系列和柱面正交的平行平面，把两个面都细分成很窄很窄的一圈圈。设相邻两个平行面之间的距离是 Δh，则柱面上的窄条（或圈）的面积等于 $2\pi R\Delta h$，而在球面上的相应窄圈，虽然其宽度和长度

会随著 θ 而改变，但在 Δh 非常、非常小的时候，它可以看成如 [图 7–3] 所示的圆台之侧面：



[图 7–3]

其中环长度是 $2\pi R\sin\theta$，亦即其环长的平均值是 $2\pi R\sin\theta$，而侧面的宽度则为 $\frac{\Delta h}{\sin\theta}$，所以其面积的高度近似值也是 $2\pi R\Delta h$（亦即可能的误差肯定在 Δh^2 这种量级）。由此他就用 Eudoxus 所创的逼近原理证明了两者的面积必然相等，而後者的面积显然等于高为 $2R$，长为 $2\pi R$ 的长方形面积，亦即 $4\pi R^2$。 □

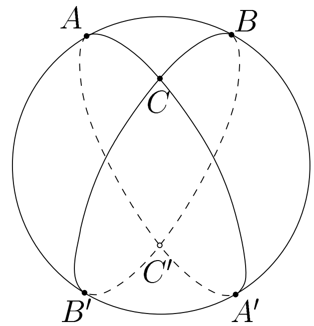
<u>球面三角形面积公式</u>：

设 A, B, C 是球面上任取三点但不含对顶者，令 $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ 为连结于点与点之间的测地线，称之为球面三角形 $\triangle ABC$ 的三个边。我们将采用和平面三角学中相同的符号体系，以 A, B, C 表示 $\triangle ABC$ 在三个顶点的内角，及以 a, b, c 表示 $\triangle ABC$ 的各角对边边长。在平面几何中，一个三角形的三个内角和恒等于一个平角，这是逻辑等价于平行公理的基本事实，也是平面的平直性的一种基本表达；在球面三角形的情形下，三内角之和则恒大于一个平角，而下述[定理 7.1]证明在单位球面上的球面三角形，其内角和与 π 的差额（称之为「角盈」）其实恰好等于其面积。

【定理 7.1】：在单位球面上，一个球面三角形 $\triangle ABC$ 的面积就是

$$\triangle ABC = A + B + C - \pi$$

<u>证明</u>：如 [图 7–1] 所示，由二个夹角为 θ 的经线所围成的球面部分，其面积显然和 θ 成正比（这是球面对以 N, S 为定点的旋转对称性的直接推论）。再者，当 $\theta = 2\pi$ 时，其面积等于 4π（阿基米德定理）！所以上述以 θ 为夹角者（称之为 spherical lune）的面积等于 2θ。



[图 7–4]

如 [图 7–4] 所示，令 A', B', C' 分别是 A, B, C 的对顶者。用上述 spherical lune 的面积公式即得：

$$
\begin{gathered}
\triangle ABC + \triangle A'BC = 2A\,, \\
\triangle ABC + \triangle AB'C = 2B\,, \\
\triangle ABC + \triangle ABC' = 2C\,, \\
\triangle ABC' = \triangle A'B'C\,, \text{（互为对顶者，当然等面积）} \\
\triangle ABC + \triangle A'BC + \triangle AB'C + \triangle A'B'C = 2\pi, \quad \text{（半球面积）}
\end{gathered}
$$

由此可得

$$2\triangle ABC + 2\pi = 2A + 2B + 2C$$

亦即

$$\triangle ABC = A + B + C - \pi \qquad \square$$

[注]：上述具有基本重要性的球面三角形面积公式其实就是阿基米德球面面积公式的局部化和精细化。

<u>球面三角形的叠合条件及等腰三角形定理</u>：

设 A, B 是球面上任给两点。在空间中和 A, B 等距的点集是直线段 $\overline{AB}$ 的垂直平分面 Π_1，它当然包含球心 O，所以和 A, B 等距的球面上之点乃是 $\Pi_1 \cap S^2(1)$ 这个大圆，而球面对于这个大圆的反射对称将 A, B 互换。用上述球面上的反射对称即可推导出：

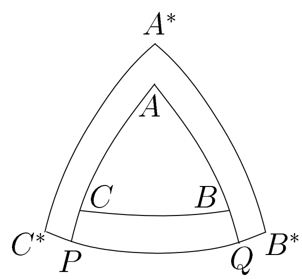
(i) S.A.S. 也是球面三角形的叠合条件；

(ii) 球面等腰三角形的两底角相等；反之，两底角相等的球面三角形亦必为等腰。

再者，由上述两点还可以同样地推导出球面三角形也具有其他如 S.S.S. 和 A.S.A. 等叠合条件。在此值得一提的是 A.A.A. 也是球面三角形的一个叠合条件，我们可以用球面三角形中所特有的对偶关系来推导它也是一个叠合条件。设 A, A' 互为对顶，则和 A, A' 等距的球面上的点集就是和 A, A' 的距离是 $\pi/2$ 的那个大圆，将以 Γ_A 记之。设 $\triangle ABC$ 是一个任给球面三角形，在下述三对对顶点偶（即 $\Gamma_B \cap \Gamma_C$, $\Gamma_C \cap \Gamma_A$, $\Gamma_A \cap \Gamma_B$）之中，分别取其靠近 A, B, C 者，以 A^*, B^*, C^* 记之，则称 $\triangle A^*B^*C^*$ 为 $\triangle ABC$ 的对偶球面三角形（$\triangle ABC$ 也是 $\triangle A^*B^*C^*$ 的对偶球面三角形）。

【引理 7.1】：令 a, b, c 和 a^*, b^*, c^* 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A^*B^*C^*$ 的各角对边边长，则有：

$$\begin{aligned} a^* &= \pi - A, \quad b^* = \pi - B, \quad c^* = \pi - C \\ a &= \pi - A^*, \quad b = \pi - B^*, \quad c = \pi - C^* \end{aligned}$$



[图 7–5]

证明：我们只需要证明其中之一，其馀各式皆可同理类推。由[图 7–5] 所示，在大圆 Γ_A 上 $\overset{\frown}{B^*P} = \overset{\frown}{C^*Q} = \pi/2$, $\overset{\frown}{PQ} = A$，故有

$$a^* = \overset{\frown}{B^*P} + \overset{\frown}{C^*Q} - \overset{\frown}{PQ} = \pi - A \qquad \square$$

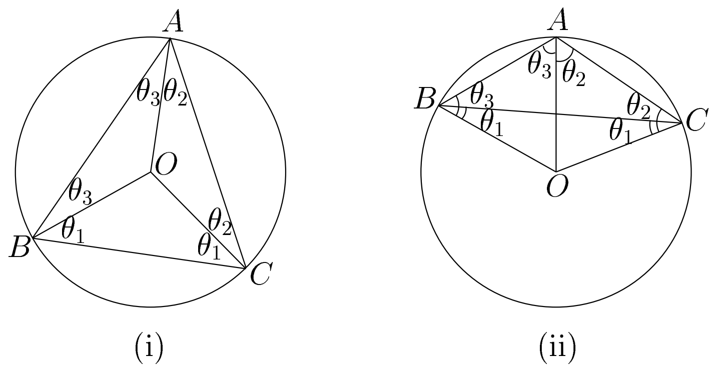
【推论】：A.A.A. 也是一种球面三角形的叠合条件。

证明：设 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三角内角对应相等，由[引理 7.1]得知它们的对偶球面三角形 $\triangle A_1^*B_1^*C_1^*$ 和 $\triangle A_2^*B_2^*C_2^*$ 的三个边长对应等长，所以是全等的，因此当然有三个对应内角相等。再用[引理 7.1]，即得 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 满足 S.S.S. 全等条件。 $\square$

【引理 7.2】：设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'BC$ 的顶点共圆而且 A, A' 同在 $\widehat{BC}$ 的一侧，则

$$\angle ABC + \angle ACB - \angle A = \angle A'BC + \angle A'CB - \angle A'$$

再者，上述之逆命题也成立。



[图 7–6]

证明：如 [图 7–6(i)] 所示，$\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA$ 皆为等腰，所以其底角相等，设其分别是 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$。则有

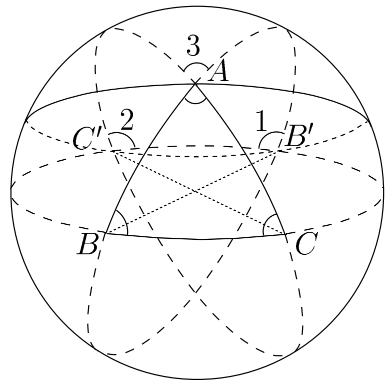
$$\angle ABC + \angle ACB - \angle A = 2\theta_1$$

同理亦有

$$\angle A'BC + \angle A'CB - \angle A' = 2\theta_1$$

[图 7–6(ii)] 的情况和逆命题的证明留作习题。 $\square$

【定理 7.2】(Lexell)：设球面三角形 $\triangle A_1BC$ 和 $\triangle A_2BC$ 具有相等的定向面积，而 B', C' 分别是 B, C 的对顶点，则 B', C', A_1, A_2 四点共圆。



[图 7–7]

证明：如 [图 7–7] 所示：

$$\angle 1=\pi-B,\ \angle 2=\pi-C,\ \angle 3=A$$

所以

$$\angle 1+\angle 2-\angle 3=\pi-\triangle ABC$$

分别取 $A=A_1$ 和 A_2，再对 $\triangle A_1B'C'$ 和 $\triangle A_2B'C'$ 运用[引理 7.2]的逆命题，即得 B', C', A_1, A_2 共圆。 □

【习题】：

(1) 设 P_1, P_2 的球面极坐标分别是 $(r_1,0)$ 和 $(r_2,0)$，而 $\gamma(t)=\big(f(t),g(t)\big)$ 是一条一阶可微曲线，$a\le t\le b$, $\gamma(a)=(r_1,0)$, $\gamma(b)=(r_2,0)$。试证其长度至少等于 $|r_1-r_2|$。

(2) 若 $\triangle ABC$ 是一个半径为 R 的球面三角形，试问 $A+B+C-\pi$ 和其面积之间的关系是什麼？并试证你的主张。

(3) 设 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 是满足 S.A.S. 条件的两个球面三角形，例如 $A_1=A_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$。试构造一系列球面上的反射对称，它们的组合恰好把 $\triangle A_1B_1C_1$ 变换到 $\triangle A_2B_2C_2$。

(4) 试用球面的反射对称性证明等腰三角形的底角相等，而顶角平分线垂直平分底边。

(5) 试用上述 (3), (4) 所证得者，证明 S.S.S. 也是球面三角形的一种全等条件。

(6) 设 O 为一个球面的心，A 为球面上任给一点，Π 为过 A 点而且和 $\overline{OA}$ 垂直的平面。试证 Π 和球面仅仅交于 $\{A\}$ 点。

(7) 设 Γ 是极坐标下「$r=$ 常数」所构成的纬圆。试求 Γ 上任一点 P 的切平面和直线 ON 的交点 V （亦即确定 $\overline{OV}$ 的长度）。

7.2 球面三角学

球面三角学研讨球面三角形的各种各样几何量如边长、角度、面积、外接圆和内切圆的半径等等的相互关系。远在古希腊时代，球面三角学即已倍加重视。Menelous 所著的 “Sphaerica” 和 Ptolemy 所著的 “Almagest” 总结了当年在球面三角学上的研究成果和它们在天文学上的应用。大体上，他们已经充分理解了直角球面三角形的各种几何量之间的相互关系；然後一直到十八世纪，球面三角学的研究才又得以蓬勃开展。

在本节的讨论中，将以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 等等表示单位球面上给定点 A, B, C 等等的位置向量，亦即 $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$ 等等，它们当然都是单位长的向量。由此可见，从向量几何的观点来看，球面几何其实也就是单位长向量的几何。

由向量运算的几何内含，即有（参看 [图 7–8] ）：

(i) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\cos a$, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=\cos b$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\cos c$ ；

(ii) $/\!/(\mathbf{b},\mathbf{c})$, $/\!/(\mathbf{c},\mathbf{a})$, $/\!/(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的面积，亦即 $|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$, $|\mathbf{c}\times\mathbf{a}|$, $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$， 分别等于 $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$；

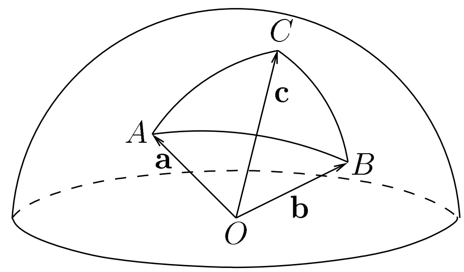
(iii) 球面三角形 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 等于 $/\!/(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和 $/\!/(\mathbf{a},\mathbf{c})$，$/\!/(\mathbf{b},\mathbf{a})$ 和 $/\!/(\mathbf{b},\mathbf{c})$，$/\!/(\mathbf{c},\mathbf{a})$ 和 $/\!/(\mathbf{c},\mathbf{b})$ 之间的两面角；

(iv) 设 $V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}>0$，以後将以 D 表示之。由行列式的乘

法公式即有：

$$D^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 2\cos a\cos b\cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c$$



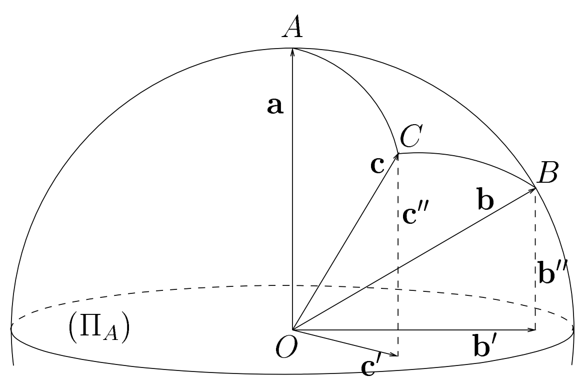
[图 7–8]

【定理 7.3】（球面三角正弦定律）：

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{D}{\sin a \sin b \sin c}$$

证明：令 Π_A 为过球心 O 点而和 $\overrightarrow{OA}$ 垂直的平面，$\mathbf{b}'$ 和 $\mathbf{c}'$ 是 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 在 Π_A 上的垂直投影，亦即：

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{b}'', \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}' + \mathbf{c}''$$

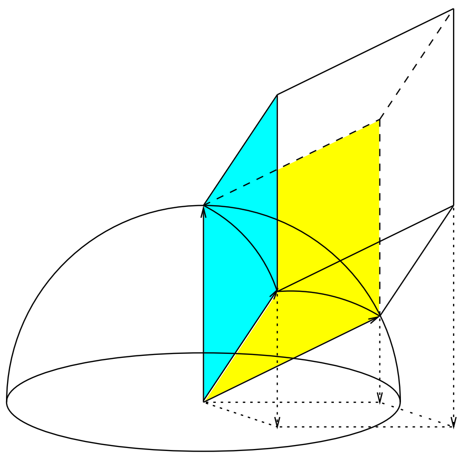


[图 7–9]

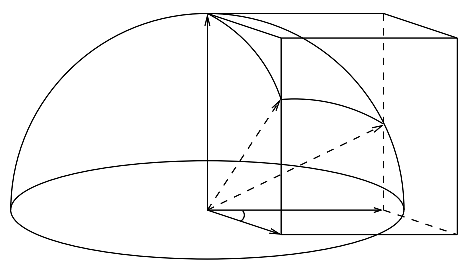
其中 $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ 和 $\mathbf{a}$ 垂直而 $\mathbf{b}''$ 和 $\mathbf{c}''$ 则为 $\mathbf{a}$ 的倍积，所以由内积和×–积的分配律，得：

$$\begin{aligned} D &= \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}') + \text{为 0 之三项} \\ &= |\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'| = |\mathbf{b}'|\cdot|\mathbf{c}'|\cdot\sin A \\ &= \sin c \sin b \sin A \end{aligned}$$

上述所作的垂直投影其实是把由 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 所张的平行六面体沿 $\mathbf{a}$ 的方向滑动，最後得出由 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ 所张的长方体，如下图所示：



[图 7–10(i)]



[图 7–10(ii)]

因为体积是斜移不变的，由此亦可以看到

$$D = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}') = \sin c \sin b \sin A$$

由此易见

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{D}{\sin a \sin b \sin c} \qquad \square$$

【定理 7.4】（球面三角馀弦定律）：

$$\begin{aligned} \sin b \sin c \cos A &= \cos a - \cos b \cos c \\ \sin c \sin a \cos B &= \cos b - \cos c \cos a \\ \sin a \sin b \cos C &= \cos c - \cos a \cos b \end{aligned}$$

证明：由面积的勾股定理，即有：

$$(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})=\begin{vmatrix}\mathbf{c}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos a & \cos c\\ \cos b & 1\end{vmatrix}$$

$$=\cos a-\cos b\cos c$$

再者，由内积 $\times$–积的几何意义，以及 A 等于 $//(\mathbf{c},\mathbf{a})$ 和 $//(\mathbf{b},\mathbf{a})$ 之间的两面角，即有：

$$\begin{aligned}(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})&=|\mathbf{c}\times\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}\times\mathbf{a}|\cos A\\&=\sin b\sin c\cos A\end{aligned}\qquad\square$$

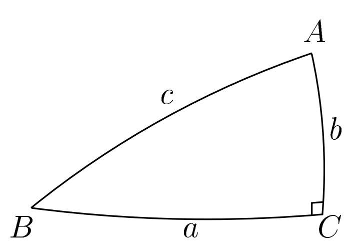
球面三角馀弦定律的另一证法：

$$\begin{aligned}\sin c\sin b\cos A&=\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}'\\&=\big(\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}\big)\cdot\big(\mathbf{c}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}\big)\\&=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\cdot 1\\&=\cos a-\cos b\cos c\end{aligned}\qquad\square$$

【推论 1】：在 $C=\dfrac{\pi}{2}$（亦即直角球面三角形）时，则有：

(i) $\cos c=\cos a\cos b,\ \ \sin A=\dfrac{\sin a}{\sin c},\ \sin B=\dfrac{\sin b}{\sin c};$

(ii) $\cos A=\dfrac{\tan b}{\tan c},\ \ \cos B=\dfrac{\tan a}{\tan c},\ \ \tan A=\dfrac{\tan a}{\sin b},\ \ \tan B=\dfrac{\tan b}{\sin a}.$



[图 7–11]

证明：由所设 $C=\frac{\pi}{2}$ 即有 $\cos C=0, \sin C=1$。所以 (i)–式乃是正、馀弦定律的直接结论。再者，

$$\begin{aligned}\sin b\sin c\cos A &= \cos a-\cos b\cos c\\ &= \cos a-\cos^2 b\cos a=\sin^2 b\cos a\end{aligned}$$

所以

$$\cos A=\frac{\sin b\cos a}{\sin c}=\frac{\tan b\cos b\cos a}{\sin c}=\frac{\tan b\cos c}{\sin c}=\frac{\tan b}{\tan c}$$

[其他三式的证明留作习题。]

半角公式：

在平面三角学中，我们有下述易算好用的半角公式，即令 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则有：

$$\begin{aligned}\cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\ \text{etc.}\\ \sin\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \text{etc.}\\ \tan\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\ \text{etc.}\\ \text{面积 }\triangle &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\ \text{内切圆半径 } r &= \frac{\triangle}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\end{aligned}$$

在球面三角学中，也有类似的半角公式，即：

【推论 2】（球面三角半角公式）：

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}},\ \text{etc.}$$
$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}},\ \text{etc.}$$
$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}},\ \text{etc.}$$
$$\tan r = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

<u>证明</u>：以 $\cos A = 2\cos^2\dfrac{A}{2} - 1$ （或 $1 - 2\sin^2\dfrac{A}{2}$ ）代入馀弦定律，即得：

$$\begin{aligned}2\sin b\sin c\cos^2\frac{A}{2} &= \cos a - \cos b\cos c + \sin b\sin c\\ &= \cos a - \cos(b+c)\\ &= 2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)\end{aligned}$$

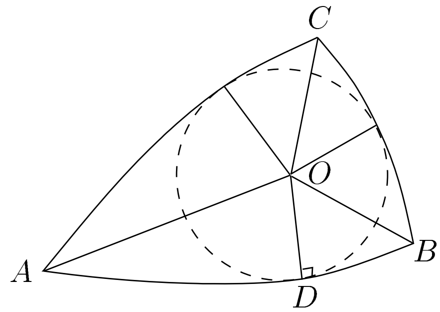
或

$$\begin{aligned}2\sin b\sin c\sin^2\frac{A}{2} &= -\cos a + \cos b\cos c + \sin b\sin c\\ &= \cos(b-c) - \cos a\\ &= 2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\end{aligned}$$

这也就证明了 (i) 和 (ii)，而 (iii) 则是 (i), (ii) 的直接推论。兹证 (iv)–式如下：

如 [图 7–12] 所示，$\triangle ADO$ 是直角球面三角形，$\overset{\frown}{AD} = s-a$, $\angle OAD = \frac{A}{2}$，所以

$$\frac{\tan r}{\sin(s-a)} = \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-1)}} \ \Rightarrow\ \text{(iv)} \qquad \square$$



[图 7–12]

阿基米德定理以及它的局部化——球面三角形面积公式：

$$\triangle = A + B + C - \pi$$

是球面几何中至关重要的基本定理。从纯几何的观点，上述面积公式已经是十分简洁完美的了；但是从向量代数的不变量理论来看，我们还需要把三角形面积和 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 的基本正交不变量，亦即 $\{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c},\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\} = \{\cos c,\ \cos a,\ \cos b\}$ 之间整理出一个简洁、整体的关系式。当然，我们可以用球面三角馀弦定律，即

$$\sin a \sin b \cos C = \cos c - \cos a \cos b \quad \text{等等}$$

得出

$$C = \cos^{-1}\left\{\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}\right\} \quad \text{等等}$$

所以这个用向量内积的面积公式当然就可以写成：

$$\begin{aligned}\triangle &= \cos^{-1}\left\{\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\right\} + \cos^{-1}\left\{\frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a}\right\} \\ &\quad + \cos^{-1}\left\{\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}\right\} - \pi\end{aligned}$$

但是这样一个繁复的表式显然不好用，因此有必要去探讨上述球面三角形面积的内积表达式背後的精简形式。这种精益求精的所得就是：

【定理 7.5】：$\tan\dfrac{\triangle}{2} = \dfrac{D}{u},\ D = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) > 0,\ u = 1 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}.$

<u>证明</u>：由球面三角正弦、馀弦定律（亦即[定理 7.3]、[定理 7.4]）即有

$$\sin A=\frac{D}{\sin b\sin c},\quad \cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

等等直接代换和代数计算可得：

$$\begin{aligned}\sin\triangle&=\sin(A+B+C-\pi)=-\sin(A+B+C)\\&=\frac{D}{\prod\sin^2 a}\left\{D^2+\sum\cos a\cos^2 b-\sum\cos a\cos b-(u-1)\cdot\prod\cos a\right\}\end{aligned}$$

上式之分母为

$$\prod(1-\cos^2 a)=\prod(1+\cos a)\prod(1-\cos a)$$

而一个令人惊喜的事实是括号内 $\{D^2+\ldots\}$ 的代数表式可以简化成 $u\cdot\prod(1-\cos a)$。所以即得：

$$\sin\triangle=\frac{Du}{\prod(1+\cos a)}=\frac{2Du}{D^2+u^2}$$

同样的代数计算可得

$$\cos\triangle=\frac{u^2-D^2}{u^2+D^2}$$

所以

$$\tan\frac{\triangle}{2}=\frac{\sin\triangle}{1+\cos\triangle}=\frac{D}{u}\qquad\square$$

[注]：在直角球面三角形，即 $C=\dfrac{\pi}{2}$ 时，尚有下述特殊公式，即：

$$\begin{aligned}\cos\triangle&=\cos\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(A+B)\\&=\frac{1}{\sin c\tan c}\left\{\sin a\tan a+\sin b\tan b\right\}=\frac{\cos a+\cos b}{1+\cos c}\end{aligned}$$

【推论 1】：若将 $\triangle ABC$ 的两边 a,b 固定而让第三边 c 变动，令

$$c_1=\cos a,\ c_2=\cos b,\ x=1+\cos c,\ \varphi=\angle C$$

则有

$$\frac{d\triangle}{dx}=\frac{c_1+c_2-x}{xD}$$
$$\frac{d\triangle}{d\varphi}=\frac{x-c_1-c_2}{x}$$

证明：由上所设，

$$u=c_1+c_2+x$$
$$D^2=-(c_1+c_2)^2+2(c_1c_2+1)x-x^2$$

将 $\tan\frac{\triangle}{2}=\frac{D}{u}$ 对于 x 求微分，即

$$\begin{aligned}\frac{d\triangle}{dx}&=\frac{d}{dx}\left(2\tan^{-1}\frac{D}{u}\right)\\&=\frac{uD'-D}{\frac{1}{2}(u^2+D^2)}=\frac{uDD'-D^2}{(1+c_1)(1+c_2)xD}\end{aligned}$$

在这里，有趣的是分子也含有 $(1+c_1)(1+c_2)$ 因式。约分後即得

$$\frac{d\triangle}{dx}=\frac{c_1+c_2-x}{xD}$$

再者，将下述馀弦定律

$$\sin a\sin b\cos\varphi=x-1-c_1c_2$$

对于 x 微分，即有

$$-\sin a\sin b\sin\varphi\frac{d\varphi}{dx}=-D\frac{d\varphi}{dx}=1$$

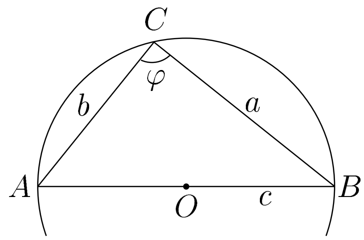
所以

$$\frac{d\triangle}{d\varphi}=\frac{d\triangle}{dx}\frac{dx}{d\varphi}=\frac{x-c_1-c_2}{x} \qquad \square$$

[注]：当 φ 从 0 变到 π，$\triangle=\triangle(\varphi)$ 的变化有下述三种情形，即：

(i) 若 $a+b<\pi$，则 $c_1+c_2>0$，而其对边 c 则从 $|a-b|$ 变到 $a+b$，函数值 $\triangle(\varphi)$ 由 0 增加到其在 $x=c_1+c_2$ 时的唯一极大值，然後再递减到 0。

[注]：$x=c_1+c_2$，即 $1+\cos c=\cos a+\cos b$ 的几何意义乃是 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心位于 $\overset{\frown}{AB}$ 之上，如 [图 7–13] 所示。其证明在讨论球面四边形时便会详细说明。



[图 7–13]

(ii) 若 $a+b>\pi$，则 $c_1+c_2<0$；其第三边 $c(\varphi)$ 则由 $|a-b|$ 增加到 $2\pi-(a+b)$。因为 $\dfrac{d\triangle}{d\varphi}$ 一直是正的，$\triangle(\varphi)$ 由 0 递增到 2π，亦即 $\triangle ABC$ 以半个球面为其上限。

(iii) 若 $a+b=\pi$，则 $c_1+c_2=0$；其第三边 $c(\varphi)$ 则由 $|a-b|$ 增加到 π，而 $\triangle(\varphi)$ 则由 0 递增到 π，亦即 $\triangle ABC$ 以四分之一球面为其上限。

【推论 2】：设球面三角形 $\triangle ABC$ 的三边边长中 c 和 $a+b$ 保持不变，则 $\triangle ABC$ 的面积是 $|a-b|$ 的递减函数。

<u>证明</u>：令 $A=\cos\frac{a+b}{2}$, $K=1+\cos c$, $t=\cos\frac{a-b}{2}$，则有：

$$\begin{aligned}
u &= \cos a+\cos b+\cos c+1=2At+K\\
D^2+u^2 &= 2(1+\cos a)(1+\cos b)(1+\cos c)=2K(A+t)^2\\
D^2 &= (K-2A^2)(2t^2-K)\\
\frac{d\triangle}{dt} &= \frac{D'u-Du'}{\frac{1}{2}(u^2+D^2)}=\frac{DD'u-D^2u'}{\frac{1}{2}(u^2+D^2)D}=\frac{2(K-2A^2)}{D(A+t)}>0
\end{aligned}$$

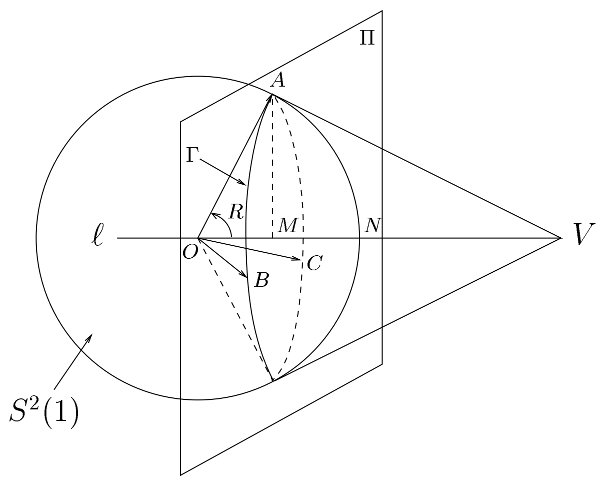
上式中 $\frac{d\triangle}{dt} > 0$ 是因为

$$\begin{aligned}K - 2A^2 &= 1 + \cos c - 2\cos^2\frac{a+b}{2} = \cos c - \cos(a+b)\\ &= 2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c) > 0\,,\\ A + t &= \cos\frac{a+b}{2} + \cos\frac{a-b}{2} = 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} > 0\end{aligned}$$

由此可见，面积 $\triangle(t)$ 是 t 的递增函数，亦即是 $|a-b|$ 的递减函数。 □

球面三角形的外接圆：

一个球面三角形 $\triangle ABC$ 的外接圆是由 A, B, C 三点所定的平面 Π 和球面的交集，而它也是平面三角形 $\triangle' ABC$ 在平面 Π 中的外接圆，如 [图 7–14] 所示：



[图 7–14]

令 M 为在 Π 上 Γ 的圆心， N 为在球面上 Γ 的圆心，$\ell = OM$。易证 OM 和 Π 垂直，而且 $N \in \ell$。 [证明留作习题]

由此可见，平面 Π 和圆 Γ 是在以 ℓ 为轴的旋转之下的不变子集 (invariant subsets)，设球面在 A 点的切面 T_A 交 ℓ 于 V 点，由上述旋转不变性可见球面在 Γ 上任给一点 P 的切面 T_P 也过 V 点。

【定理 7.6】：

$$\overrightarrow{OV} = \frac{1}{D}(\mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\mathbf{c} + \mathbf{c}\times\mathbf{a})$$

证明：设 $T_A\cap\ell=\{V\}$。由所设 ℓ 过球心 O 而且和 Π 正交，所以 $S^2(1)$ 和 Π 在以 ℓ 为轴的旋转下都是不变子集，因此 $\Gamma=S^2(1)\cap\Pi$ 也当然是不变子集。设 P 为 Γ 上任给一点，则有一个 ℓ–轴旋转 ρ，它把 A 点移动到 P 点，易见 $\rho(T_A)=T_P$，而 ρ 是保持 ℓ 每一点固定不动的，所以 $T_P\cap\ell=\rho(T_A\cap\ell)=\rho(V)=V$。

再者，$T_A\cap T_B\cap T_C$ 只含有一个点，所以 V 其实就是 $\{T_A,T_B,T_C\}$ 的共交点。由此可见：

$$\overrightarrow{OV}\cdot\mathbf{a}=1\,,\ \overrightarrow{OV}\cdot\mathbf{b}=1\,,\ \overrightarrow{OV}\cdot\mathbf{c}=1$$

而且 $\overrightarrow{OV}$ 是唯一能够满足上述三个等式的向量。由直接验算可知：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{a} &= \frac{1}{D}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=1\\
\frac{1}{D}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} &= \frac{1}{D}(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=1\\
\frac{1}{D}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c} &= \frac{1}{D}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=1
\end{aligned}$$

所以它必然是 $\overrightarrow{OV}$。 □

【推论 1】：单位球面上四点 $\{A,B,C,D\}$ 共圆的充要条件是它们的位置向量 $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}$ 满足

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{d}-(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{d}-(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{d}=0$$

证明：由上述讨论，D 位于 $\triangle ABC$ 的外接圆的充要条件乃是 T_D 也过 V 的，即 $\overrightarrow{OV}\cdot\mathbf{d}=1$，亦即：

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}-(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{d}=0$$ □

【推论 2】：设 R 为球面上 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，亦即 [图 7–14] 中之 $\overset{\frown}{AN}$ 的弧长，则有：

$$\tan^2 R=\frac{2}{D^2}(1-\cos a)(1-\cos b)(1-\cos c)$$

证明：如 [图 7–14] 所示，

$$\begin{aligned}\tan^2 R &= \overline{OV}\cdot\overline{OV}-1\\ &= \frac{1}{D^2}\{4(1+w)-u^2-D^2\}\\ &= \frac{2}{D^2}(1-\cos a)(1-\cos b)(1-\cos c)\end{aligned}$$

其中 $w=\cos a\cos b+\cos b\cos c+\cos c\cos a$。 □

球面四边形 (spherical quadrilaterals)：

一如在平面的情形，两个三角形若其三边对应等长则为全等，但是两个四边形若其四边对应等长仍然是可能不全等的；即使在凸的情况，还是需要加上其一个对应对角线等长，才能完全确定其叠合性。设 $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}$ 是一个球面四边形的顶点的位置向量，它们共有六个交叉内积，亦即是其四个边长和两个对角线长的馀弦，它们之间具有一个函数关系，由此可以从给定其中五个之值去确定其第六个之值。我们可以用平行六面体定向体积（亦即行列式）的乘法公式来求得这种函数关系式，即：

$$[V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})]^2\cdot[V(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})]^2=[V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot V(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})]^2$$

两边分别用行列式乘法公式计算，即得：

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{d}\cdot\mathbf{a}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{d}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{d}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}^2$$

若以

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}=1\\ &\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\cos\ell_1,\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\cos\ell_2,\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=\cos\ell_3,\ \mathbf{d}\cdot\mathbf{a}=\cos\ell_4\\ &\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\cos d_1,\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}=\cos d_2\end{aligned}$$

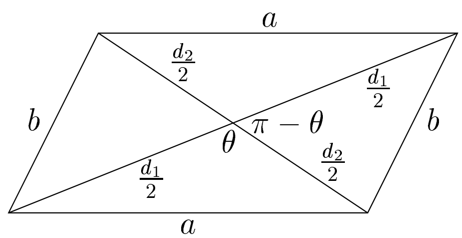
代入即为：

$$\begin{vmatrix}1 & \cos\ell_1 & \cos d_1\\ \cos\ell_1 & 1 & \cos\ell_2\\ \cos d_1 & \cos\ell_2 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & \cos d_1 & \cos\ell_4\\ \cos d_1 & 1 & \cos\ell_3\\ \cos\ell_4 & \cos\ell_3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \cos\ell_1 & \cos d_1\\ \cos d_1 & \cos\ell_2 & 1\\ \cos\ell_4 & \cos d_2 & \cos\ell_3\end{vmatrix}^2$$

上述是一般情形的普遍关系式，若在 $\ell_1=\ell_3\,(=a)$, $\ell_2=\ell_4\,(=b)$，亦即二对对边各别等长的特殊情形，则上述关系式可以大为简化，其结果为

$$(1+\cos d_1)(1+\cos d_2)=(\cos a+\cos b)^2$$

[注]：在平面几何中，两对对边各别等长的四边形就是平行四边形，因此这种球面四边形也可以看成平行四边形在球面几何中的推广（虽然「平行」这个名称实在已经名不符实的了！）。其实，这种球面四边形除了没有两对对边互相平行这个性质之外，也具有平行四边形的其他性质，例如其对角线互相平分、两对对角各别相等 [证明留作习题]。再者，我们也可以用对角线互相平分来直接验证上述关系式：



[图 7–15]

如 [图 7–15] 所示，即有馀弦定律公式：

$$\begin{aligned}\sin\frac{d_1}{2}\sin\frac{d_2}{2}\cos\theta &= \cos a-\cos\frac{d_1}{2}\cos\frac{d_2}{2}\\ \sin\frac{d_1}{2}\sin\frac{d_2}{2}\cos(\pi-\theta) &= \cos b-\cos\frac{d_1}{2}\cos\frac{d_2}{2}\end{aligned}$$

两式相加，即得

$$0=(\cos a+\cos b)-2\cos\frac{d_1}{2}\cos\frac{d_2}{2}$$

亦即

$$(\cos a+\cos b)^2=(1+\cos d_1)(1+\cos d_2)$$

再者，上述四边形顶点共圆的充要条件是 $d_1=d_2=d$，亦即

$$\cos a+\cos b=1+\cos d$$

由此可见，[定理 7.5]的[推论 1]中 $\frac{d\triangle}{d\varphi}=0$ 的条件式：

$$c_1+c_2-x=\cos a+\cos b-(1+\cos c)=0$$

其几何意义是 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心位于 $\widehat{AB}$ 之上。[在平面几何中，$\overline{AB}$ 是外接圆的直径和 $\angle C = \pi/2$ 是等价的，显然也是 a, b 边固定时 $\triangle$ 面积的极大。在此值得一提者是：二边边长给定的三角形，在第三边为其外接圆的直径时面积极大在非欧几何中亦成立。]

<u>球面四边形的面积</u>：

在欧氏平面几何中，矩形面积公式扮演著重要的角色。再者，矩形乃是平行四边形的特例，亦即对角线等长的平行四边形（或者说，是四顶点共圆的平行四边形）。所以，在球面几何中，矩形的自然推广就是上述球面「平行四边形」在四顶点共圆（或对角线等长）的情形。由[定理 7.5]的[推论 1]可见，给定两对对边边长（设为 a, b）的「平行四边形」之中，其面积以矩形为极大。

【定理 7.7】：（球面矩形面积公式）在单位球面上以 a, b 为其两对对边长的矩形，其面积公式为

$$\square(a,b) = 4\tan^{-1}\left\{\frac{(1-\cos a)(1-\cos b)}{2(\cos a + \cos b)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

<u>证明</u>：令其对角线长为 c（两者等长）。则有

$$\begin{aligned} &1 + \cos c = \cos a + \cos b \\ &u = 2(\cos a + \cos b) \\ &D^2 = 2(\cos a + \cos b)(1-\cos a)(1-\cos b) \end{aligned}$$

亦即

$$\square(a,b) = 4\tan^{-1}\frac{D}{u} = 4\tan^{-1}\left\{\frac{(1-\cos a)(1-\cos b)}{2(\cos a + \cos b)}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad \square$$

其实，顶点共圆时面积为极大并不只限于「平行四边形」，详见下述[定理 7.8]：

【定理 7.8】：在四边边长给定为 $\{\ell_i, 1 \le i \le 4\}$ 而且总长少于 2π 的四边形中，其面积以顶点共圆时为唯一的极大值，而且远离共圆的变形使得面积愈来愈小。

证明：令 $c_i=\cos\ell_i,\ x=1+\cos d$，其中 $d=\overset{\frown}{AC}$（在 $\square ABCD$ 非凸时，我们选定 $\overset{\frown}{AC}$ 是位于内部的那条对角线），以 $\triangle_1,\triangle_2$ 分别表示 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的面积，则有：

$$A(\square ABCD)=\triangle_1+\triangle_2=2\tan^{-1}\frac{D_1}{u_1}+2\tan^{-1}\frac{D_2}{u_2}$$

其中

$$\begin{aligned}&u_1=c_1+c_2+x,\quad u_2=c_3+c_4+x\\&D_1^2=-(c_1+c_2)^2+2(c_1c_2+1)x-x^2\\&D_2^2=-(c_3+c_4)^2+2(c_3c_4+1)x-x^2\end{aligned}$$

[选取顶点之顺序使得 $D_1=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 和 $D_2=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$ 都是正的。]

由[定理 7.5] [推论 1]的微分计算，即有

$$A'(x)=\triangle_1'(x)+\triangle_2'(x)=\frac{c_1+c_2-x}{xD_1}+\frac{c_3+c_4-x}{xD_2}$$

现在让我们用向量代数来分析一下上式右侧的几何意义：令 $\ell_1=T_A\cap T_C,\ P_0=T_A\cap T_C\cap(OAC)$，则有 $\overrightarrow{OP_0}$ 是 $\mathbf{a},\mathbf{c}$ 的线性组合而且 $\overrightarrow{OP_0}\cdot\mathbf{a}=\overrightarrow{OP_0}\cdot\mathbf{c}=1$，所以

$$\overrightarrow{OP_0}=\frac{1}{1+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{c})$$

再者，设 P 是 ℓ_1 上任给一点，则由 $\ell\perp(OAC)$ 可见 $\overrightarrow{P_0P}$ 乃是 $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ 的一个倍积，所以

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{c})+k(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$$

令 V_1,V_2 分别是 T_B,T_D 和 ℓ_1 的交点，亦即

$$V_1=T_A\cap T_C\cap T_B,\quad V_2=T_A\cap T_C\cap T_D$$

则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OV_1}&=\frac{1}{1+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{c})+k_1(\mathbf{a}\times\mathbf{c}),\quad \overrightarrow{OV_1}\cdot\mathbf{b}=1\\\overrightarrow{OV_2}&=\frac{1}{1+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{c})+k_2(\mathbf{a}\times\mathbf{c}),\quad \overrightarrow{OV_2}\cdot\mathbf{d}=1\end{aligned}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}(c_1+c_2)-k_1D_1=1 \Rightarrow k_1=\frac{c_1+c_2-x}{xD_1}\\ \frac{1}{x}(c_3+c_4)+k_2D_2=1 \Rightarrow k_2=\frac{x-c_3-c_4}{xD_2}\end{aligned}$$

由此可见

$$\overrightarrow{V_2V_1}=(k_1-k_2)\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\left(\frac{c_1+c_2-x}{xD_1}+\frac{c_3+c_4-x}{xD_2}\right)\mathbf{a}\times\mathbf{c}=A'(x)\mathbf{a}\times\mathbf{c}$$

所以在 $V_1=V_2$ 时 $A(x)$ 为极大，而 $V_1=V_2$ 也就是顶点共圆。 □

【例题 1】：设 x_0 为四边形面积函数的极值点，即

$$A'(x_0)=\frac{c_1+c_2-x_0}{x_0D_1(x_0)}+\frac{c_3+c_4-x_0}{x_0D_2(x_0)}=0$$

若 $c_1+c_2=c_3+c_4$，则显然 $x_0=c_1+c_2=c_3+c_4$ 是所求之解，再者在这种情形，$\overset{\frown}{AC}$ 乃是外接圆的直径而 $\triangle_1(x_0)$ 和 $\triangle_2(x_0)$ 各别都是极大。

若 $c_1+c_2\neq c_3+c_4$ （可以设 $c_1+c_2>c_3+c_4$ ），由条件式

$$\frac{c_1+c_2-x_0}{x_0D_1}+\frac{c_3+c_4-x_0}{x_0D_2}=0$$

即

$$\frac{c_1+c_2-x_0}{x_0D_1}=\frac{x_0-c_3-c_4}{x_0D_2}\quad(>0)$$

所以有

$$\frac{c_1+c_2-x_0}{x_0-c_3-c_4}=\frac{D_1(x_0)}{D_2(x_0)}$$

令其为 λ，则有

$$\begin{aligned}\lambda^2&=\frac{D_1(x_0)^2}{D_2(x_0)^2}=\frac{(c_1+c_2-x_0)^2}{(c_3+c_4-x_0)^2}\\&=\frac{D_1(x_0)^2+(c_1+c_2-x_0)^2}{D_2(x_0)^2+(c_3+c_4-x_0)^2}\\&=\frac{(1-c_1)(1-c_2)}{(1-c_3)(1-c_4)}\\ \Rightarrow\quad\lambda&=\sqrt{\frac{(1-c_1)(1-c_2)}{(1-c_3)(1-c_4)}}\end{aligned}$$

再由

$$\frac{c_1+c_2-x_0}{x_0-c_3-c_4}=\lambda=\sqrt{\frac{(1-c_1)(1-c_2)}{(1-c_3)(1-c_4)}}$$

即求得

$$x_0=\frac{(c_1-c_2)\sqrt{(1-c_3)(1-c_4)}+(c_3-c_4)\sqrt{(1-c_1)(1-c_2)}}{\sqrt{(1-c_3)(1-c_4)}+\sqrt{(1-c_1)(1-c_2)}}$$

<u>注意</u>: 在 $c_1+c_2=c_3+c_4$ 时，上述公式即为

$$x_0=c_1+c_2=c_3+c_4$$

所以上述由 $\{c_i=\cos\ell_i, 1\le i\le 4\}$ 表达 $x_0=1+\cos d$ 的公式是普遍成立的！

【例题 2】：设四边形的四个边长依序取定为 $\{\ell_i, 1\le i\le 4\}$，令 φ 为 $\angle B$ 的角度，则其面积为 φ 的函数，亦即 $A(x), x=x(\varphi)$。由馀弦定律，即

$$\sin\ell_1\sin\ell_2\cos\varphi=(x-1)-\cos\ell_1\cos\ell_2$$

对 x 求微分，即得

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{1}{D_1}=\frac{1}{(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}}$$

再者，原先由[定理 7.8]的证明已得

$$\overrightarrow{V_2V_1}=\frac{dA}{dx}\mathbf{a}\times\mathbf{c}$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_2V_1}\cdot\mathbf{b}&=\frac{dA}{dx}(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}\\&=\frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{d\varphi}=\frac{dA}{d\varphi}\end{aligned}$$

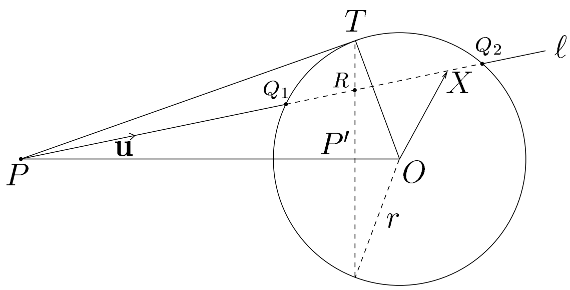
【习题】：

(1) 试问球面上一个保长变换的定点子集有那些可能性？并举例说明你所说的那种可能性是的确可能的。

(2) 设 $\triangle ABC$ 是一个直角球面三角形，$\angle C = \frac{\pi}{2}$。试证

$$\cos B = \frac{\tan a}{\tan c},\ \tan A = \frac{\tan a}{\sin b},\ \tan B = \frac{\tan b}{\sin a}$$

(3) 设 $S^2(r)$ 是一个以 O 为球心，半径为 r 的球面。P 是球外一个给定点（如 [图 7–16] 所示）：



[图 7–16]

设 ℓ 为过 P 点而且交 $S^2(r)$ 于 Q_1, Q_2 的直线。试证恒有

$$\overline{PQ_1} \cdot \overline{PQ_2} = \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 - r^2$$

[提示：设 $\mathbf{u}$ 是直线 ℓ 上的单位长向量，$\overline{PQ_1} = k_1, \overline{PQ_2} = k_2$ 而 X 是 ℓ 上的动点，则有 $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OP} + k\mathbf{u}$，其中 k 是 $\overrightarrow{PX}$ 的有向长度，而 $X \in S^2(r)$ 的条件式则是 $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX} = r^2$。]

(4) 设 PT_i 是和 $S^2(r)$ 相切于 T_i 的那条切线，$i = 1, 2$。试证 $\overline{PT_1}$ 和 $\overline{PT_2}$ 等长，并描述所有过 P 点和 $S^2(r)$ 相切的切点所组成的点集。

(5) 令 P' 是位于直线 OP 之上而且 $\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OP} = r^2$ 的点，Π 是和 OP 正交于 P' 点的平面，令 $R = \ell \cap \Pi$。试证 $(PR; Q_1Q_2)$ 成调和点列，亦即

$$\frac{\overrightarrow{Q_1P}}{\overrightarrow{PQ_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{Q_2R}}{\overrightarrow{RQ_1}} = -1$$