绪论：基础数学在理性文明中所扮演的角色

纵观古今，世界上诸多古文明大体上可以分成「有圆文明」和「无圆文明」这样两类。前者如中国古文明、古希腊文明等等，发明了轮子、拱门，善用空间的旋转对称性，逐步走上工业化而昌盛至今；而後者如玛雅 (Maya) 文明、印加 (Inca) 文明等等则始终未能发明轮子而终归寂灭，如今只遗留下残墟断壁，徒然令怀古之後人为之神伤。为什麼古文明之「有圆者」和「无圆者」在其兴衰与发展上竟有如此截然不同的天壤之别呢？此事绝非偶然之巧合，值得我们反思深究！

概括地说，我们与宇宙万物共存于其间的「空间」是既平直又对称，无比美妙的环境。生存于其间实乃无上之「福份」。在中文里关于福字主要有下列四点，即为

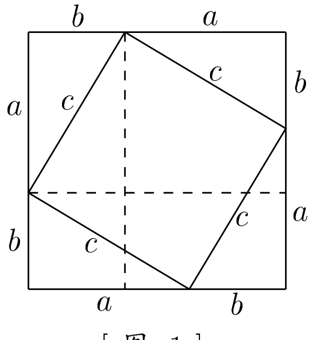
有福、知福、造福 和 惜福

「无圆文明」 可以说是身在福中不知福者也，所以也就无从造福；而「有圆文明」中逐步发展起来的几何知识则可以说在「知空间美妙之福」上下功夫，自然也就能够由知福进而造福。由上面这样一段简短的分析，也就可以看出几何学在文明的兴衰中所扮演的重要角色了。

显然，空间的美妙之处并不局限于其旋转对称性，而且空间的美好本质则仅仅是大自然总体结构的至善至美的本质的一部分。大体上来说，整个自然科学也就是人类理性文明世代相承、精益求精的「知福」是也，而几何学则自然而然理所当然地是第一科学。再者，现代蓬勃进展的科技可以说就是以自然科学中「知福」之所得，用来「造福」者也。但是当此现代科技空前澎胀之际，人类应当注意要「惜福」。要不然，盲目造福，其结果往往会变成是祸非福！

1　中西定量几何的比较分析

大概远在战国时代，定量几何知识乃是以一套简朴实用的测量公式在工匠和水利工程师之间流传，如公输般、墨子、西门豹、李冰、李二郎等等很可能就是中国古文明中几何知识的创建者和继承者。中国古代几何的独到灼见是善用面积，以矩形面积等于长乘宽为基础，推导直角三角形的面积等于底乘高之半，然後再用下述图解简洁利落地证明了勾股弦公式和相似直角三角形的比例式，即：



[图–1]

用实线和虚线所示的两种分割，可得

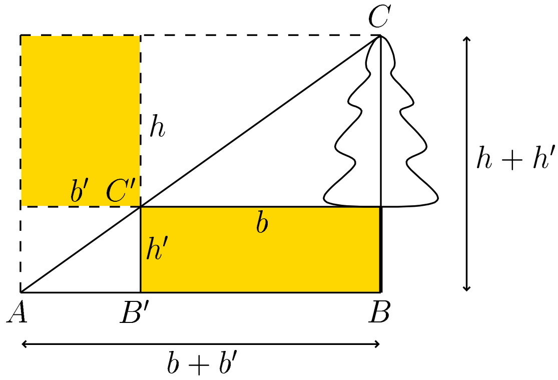
$c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab = a^2 + b^2 + 2ab$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$　（亦即勾方加股方等于弦方）

由 [图–2] 所示，用出入相补可见两个矩形面积相等，亦即

$$b \cdot h' = b' \cdot h \ \Rightarrow \ \frac{b}{b'} = \frac{h}{h'} \ \Rightarrow \ \frac{b+b'}{b'} = \frac{h+h'}{h'}$$

亦即相似直角三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AB'C'$ 的直角对应边边长比例式。



[图–2]

若用现代定量平面几何的知识来分析，上述矩形和直角三角形的面积公式，以及勾股弦和出入相补比例式其实业已构成一组完备的定量平面几何基础。它不但简明扼要，而且用面积公式直截了当地一以贯之。这种处理方式易学好用，至今依然是定量平面几何入门的捷径。

接著让我们来谈一谈古希腊的定量平面几何学。几何学是古希腊文明最辉煌的成就，它是以古埃及和古巴比伦文明的几何知识为基础，集希腊的精英，历经好几世纪世代相承、精益求精的研究创造而成者，乃是人类文明中第一个趋于成熟的科学。它不但是其他自然科学的基础所在，而且也是整个自然科学在思想上、方法论上治学的典范。长话短说，古希腊几何学的进程是先研究定性平面几何，其研讨主题是全等形和平行，然後再进而研讨定量平面几何，最後再以平面几何为基础，进而研讨立体几何。在此，我们将专注于其中最为关键的定量平面几何中的重大转折与突破。

假如我们把中、西各自发展起来的定量平面几何作一比较，两者所得的基本公式大致相同，亦即矩形、三角形的面积公式，勾股弦（亦即毕氏定理）和相似三角形的边长比例式，但是在基调和格局上则两者是迥然不同的。中国古代的工程师研讨几何是为了致用，是唯用是尚的；但是古希腊的学者把几何学的研讨作为理解宇宙的基础学科，所以治学十分严谨，高度注重其基本概念的明确性和推理论证上的严格性。例如在研讨定量几何的起始，直线段长度的度量乃是最为基本的概念，为了明确它的意义，古希腊的几何学家提出「可公度性」(commensurability) 这个基本概念，即

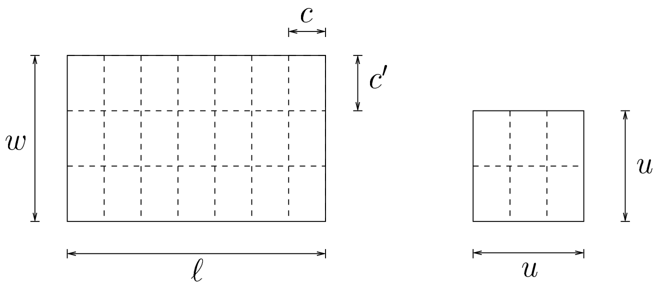
【定义】：两个直线段 a, b 称之谓可公度，若存在有一个适当的公尺度 c，使得两者都是 c 的整数倍，亦即 $a = m \cdot c, b = n \cdot c$。这也就是 a, b 长度的比值等于分数 $\frac{m}{n}$ 的定义，以 $a : b = \frac{m}{n}$ 记之。

接著，他们认为上述可公度性应该是普遍成立的，而且以它为定量几何基础论的「头号公理」，从而对于定量几何中的基本公式逐一作出严格的论证。例如当年对于矩形面积公式的论证大致如下：

设矩形的长和宽分别是 ℓ 和 w，而 u 则是取定的单位长。由可公度性普遍成立的「公设」即分别有 $\{\ell, u\}$ 和 $\{w, u\}$ 的公尺度 c, c'，使得它们分别是 c, c' 的整数倍，亦即

$$\begin{array}{lll} \ell = m \cdot c, & u = n \cdot c, & (\ell : u) = \frac{m}{n} \\ w = p \cdot c', & u = q \cdot c, & (w : u) = \frac{p}{q} \end{array}$$

如 [图–3] 所示，$\square(\ell, w)$ 和 $\square(u, u)$ 分别可以用平行线分割成 $m \cdot p$ 和 $n \cdot q$ 个 $\square(c, c')$。



[图–3]

由此可见 $\square(\ell, w) = (m \cdot p)\square(c, c')$ 和 $\square(u, u) = (n \cdot q)\square(c, c')$，所以

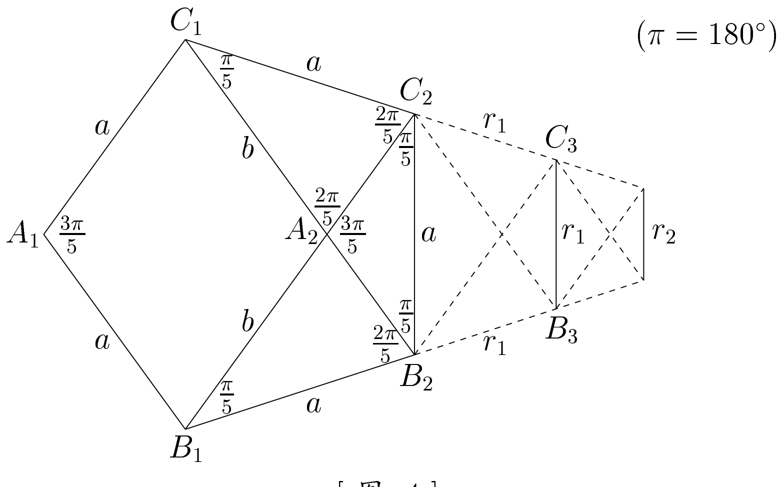
$$\square(\ell, w) : \square(u, u) = \frac{mp}{nq} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = (\ell : u) \cdot (w : u)$$

这也就是矩形面积公式。

总之，他们当年基于「可公度性普遍成立」这个「公设」，对于定量平面几何的重要公式如毕氏定理、相似三角形边长比例式等等，都给以严格的证明，建立起洋洋大观的定量平面几何基础论。其中毕氏学派的贡献良多，引以自豪。

及至毕氏本人百年之後不久，其门徒 Hippasus 却有了一个石破天惊的新发现，那就是正五边形的边长和对角线长其实是<u>不可公度的</u>！因此当年用来建立定量几何基础论的「头号公设」根本是错误的！亦即可公度性<u>并非</u>普遍成立！

现在让我们先来看一下 Hippasus 当年的重大发现及其论证。话说当年，Hippasus 在沙盘上用芦苇杆画了一个大致如 [图–4] 所示的正五边形，然後开始用当时业已熟知的等腰三角形定理和三角形内角和定理来作下述分析：



[图–4]

五边形的内角和恒等于 3π，所以上述正五边形 $⬠A_1B_1B_2C_2C_1$ 的每个内角都等于 $\frac{3\pi}{5}$。由此可见等腰 $\triangle B_1B_2C_2$ 和 $\triangle B_2C_2C_1$ 的两底角皆为 $\frac{\pi}{5}$。令对角线 $\overline{B_1C_2}$ 和 $\overline{B_2C_1}$ 的交点为 A_2。则有 $\triangle C_1A_2C_2$ 的两底角皆为 $\frac{2\pi}{5}$，而 $\triangle A_2B_2C_2$ 的两底角皆为 $\frac{\pi}{5}$，所以它们都是等腰的。

上述看来不起眼的几何分析却使得 Hippasus 大为震惊！为什麼呢？若以上述五边形的边长 a 去丈量其对角线长 b，则其余段 r_1 就是等腰 $\triangle A_2B_2C_2$ 的等边边长。若将 $\overline{C_1C_2}$ 延长一段 $\overline{C_2C_3} = r_1$，$\overline{B_1B_2}$ 延长一段 $\overline{B_2B_3} = r_1$，则易证 $⬠A_2B_2B_3C_3C_2$ 又是一个正五边形，而它的边长是 r_1，对角线长则是 a。

在当年，Hippasus 至少已认识到下述两个给定的可公度线段 a, b 的最长公尺度的几何求法，称之为「辗转丈量法」：

【辗转丈量法】：设 $a < b$，我们用 a 为尺去丈量 b。若恰能整量，即 $b = n_1a$，则显然 a 本身就是 $\{a,b\}$ 的最长公尺度。不然，$b = n_1a + r_1, r_1 < a$。再用 r_1 为尺丈量 a，若恰能整量，则 r_1 即为 $\{a,b\}$ 的最长公尺度；不然，$a = n_2r_1 + r_2$。再用 r_2 为尺丈量 r_1，如此辗转丈量，一直到 r_k 恰能整量 r_{k-1} 为止。则 r_k 即为所求的最长公尺度。

因此当我们再用 r_1 去丈量 a 时，在本质上又是用一个正五边形的边长去丈量其对角线长。同理，所得的余段 r_2 又是一个更小一号的正五边形的边长而其对角线长则为 r_1。如此辗转丈量，每一次所做者在本质上总是用一个正五边形的边长去丈量其对角线长，只是那个正五边形逐次缩小吧了。这样就理论上证明了 $\{a,b\}$ 的辗转丈量必然是永无止休的！因此 $\{a,b\}$ 必然是不可公度的，此事焉能叫他不吃惊!?这个惊人的发现事实胜于雄辩地证明了当年定量几何基础论的头号基石——「可公度性的普遍成立」其实根本是一个错误的「公设」！

【历史的注记】：Hippasus 的伟大发现，是人类理性文明的重要里程碑，有如发现了一个理念上的新大陆，它不单对于定量几何学有根本的重要性，其实对于整个自然科学都有深远的影响。但是当年古希腊几何学界，特别是 Hippasus 本人所在的毕氏学派对于这个伟大发现的反应，却是全然无理性的。据某些现在已不可详考的记载，Hippasus 反而因为这个重大发现而丧生于同门之手。

其实，不可公度性的存在，并不是全面否定了当年古希腊几何学在定量几何基础论上的成就。它只是说原本以为已经完整无缺的证明其实只是在可公度的情形的证明，而在一般不可公度的情形，则尚有待补证！这个亟待补证的任务对于当年整个古希腊几何学界是一个严峻而且迫切的挑战。大约经历半个世纪的努力，才促使 Eudoxus 开创了影响无比深远广阔的逼近法和逼近原理而得以完美成功。可以这麼说 Eudoxus 的思想和方法提供了研讨和理解 Hippasus 所发现的新大陆的基础。

长话短说，Eudoxus 所创的逼近法不但把当年仅仅在可公度的特殊情形下具有其证明的各种各样定理和公式，加以明确简洁的补证，使得它们不论在可公度或不可公度的情形皆普遍成立，从而彻底重建了定量几何基础论。再者，他有鉴于曾经采用错误的「公设」作为几何学的论证依据的惨痛教训，决心下功夫彻底检查当代的几何学，尽其所知所能把其论证的依据，精简压缩到「至精至简」；流传至今的《欧氏几何学》(Euclidean Geometry) 其中绝大部份来自 Eudoxus 的著作。所以「公理化」治学的典范和人类理性文明中的第一科学的初阶集其大成，实乃 Eudoxus（而并非 Euclid）的伟大贡献。不但此也，Eudoxus 的逼近原理和方法论不但重建了定量几何基础论，而且也是分析学 (Analysis) 的发祥地和基

本方法。他本人就把它用来证明锥体体积等于三分之一底面积乘高这个立体几何基本公式，他的证法以及随後 Archimedes 把它拓展到球面面积公式和球体体积公式的论证乃是积分学的雏形和范例。

如今回顾反思，将中、西古文明的定量平面几何再作一比较分析，中国古代虽然在基本测量公式的推导上善用面积，有其独到的长处；但是在对于空间本质理解的深度上，比之于古希腊几何学是的确瞠乎其後的了。究其原因，我想并非是在聪明才智上有任何差别，而是在格调、志趣和气概上有所分野！例如「可公度性」乃是一个纯理论性的问题。在实用的度量中，在力所能及的准确度之下的微量根本没有其实质意义，所以根本不存在可不可公度这种问题。由此可见，在唯用是尚的格局下，根本是不会有此一问的，当然也不会有 Hippasus 这种深深触及空间的连续性的发现和历经半世纪的奋斗才结晶而得的 Eudoxus 逼近原理和方法论，是不？由此反思，中国青年应该体认到局限中国古代几何的发展因素乃是：「唯用是尚，则难见精深，所及不远」；而古希腊几何学上的成功给全人类的启示与鼓舞则是：「若以理解大自然为志趣，并能世代相承、精益求精，则宇宙基本结构的至精至简、至善至美是可望可及的。」

2 代数学的起源与精简

大自然中的万物万象是繁复多样、多采多姿的，而它的内在结构和基本原理则又是既精且简。由此可以想到，我们必须由表及里，深入研究才能探索其精简之原理。在此，定量研讨和数理分析乃是基本方法和重要工具。几何学、代数学和有效融合代数和几何发展而得的分析学，也就是我们运用解析思维，研究探索大自然的内在本质的基础数学。下面让我们再对代数学的起源和精简所在作一返璞归真的剖析：

概括地来说，所有能够用加、减、乘、除等代数运算加以表述的数量问题，通称之谓代数问题；而代数学的主题就是研讨各种各样代数问题的有效、有系统的解法，例如解代数方程，求公式等等。从表面上来看，含有 x, y, z 等符号的代数式的运算乃是代数讨论中常见常用者，而这些符号则是在代数运算上具有那种对于任何数皆普遍成立的通性（亦即满足运算律）者也。总之，代数学的基本思想就是要善用运算律去有系统地解决各种各样代数问题，乃是以通性求通解。

分配律是运算律之中最为有用、有力者。所以分配律的有效运用乃是代数学的精简之所在，而其中最为简朴精到，而且应用极为广泛的用法，则是起源于中国古算中的韩信点兵法。为了节省时间，在此改用算术语句来剖析其所体现的思想和分配律的简朴妙用。

【例子】：设有士兵约二千人，若以 7 人一组则剩 3 人，若以 11 人一组则剩 4 人，若以 13 人一组则剩 8 人。试求士兵的确切人数。

这种问题，在数论中叫做剩余问题，而韩信点兵法的算法则叫做中国剩余定理 (Chinese remainder theorem)。在求解这种剩余问题之中，当余数分别是 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ 和 $(0,0,1)$ 这三个特殊情形乃是既易算而又能控制全局的「战略要点」：

由 $143x_1 = 140x_1 + 3x_1$ 易见 $x_1 = 5$ 时 $143x_1$ 除以 7 余 1；

由 $91x_2 = 88x_2 + 3x_2$ 易见 $x_2 = 4$ 时 $91x_2$ 除以 11 余 1；

由 $77x_3 = 65x_1 + 12x_3$ 易见 $x_3 = 12$ 时 $77x_3$ 除以 13 余 1。

再由分配律，可见

$$3 \times (143 \times 5) + 4 \times (91 \times 4) + 8 \times (77 \times 12) = 10993$$

的余数分别就是 $(3, 4, 8)$。因此它和所求者的差额乃是 $1001 = 7 \times 11 \times 13$ 的倍数，由此易见所求者乃是 1984 人。

韩信点兵法的启示是：运用分配律把一般的剩余问题直截了当地归于其余数分别是 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ 和 $(0, 0, 1)$ 者来求解。设後者分别是 b_1, b_2 和 b_3，则余数为 (r_1, r_2, r_3) 者和 $r_1b_1 + r_2b_2 + r_3b_3$ 之间的差别乃是一个余数为 $(0, 0, 0)$ 者，亦即是除数的一个公倍数。

插值问题和插值公式：

由熟知的公式 $(x^k - a^k) = (x - a)(x^{k-1} + ax^{k-2} + \ldots + a^{k-1})$ 和分配律，易见

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= (c_0 + c_1x + \ldots + c_kx^k + \ldots + c_nx^n) - (c_0 + c_1a + \ldots + c_ka^k + \ldots + c_na^n) \\ &= c_1(x - a) + c_2(x^2 - a^2) + \ldots + c(x^k - a^k) + \ldots + c_n(x^n - a^n) \\ &= (x - a)\left\{c_1 + c_2(x + a) + \ldots + c_k(x^{k-1} + ax^{k-2} + \ldots + a^{k-1}) + \ldots\right\} \end{aligned}$$

亦即 $f(x)$ 被 $(x - a)$ 除的余式等于 $f(a)$。这也就是代数中的余式定理。由此不难推论一个 n 次多项式函数乃是由它在 $(n + 1)$ 点的取值所唯一确定。多项式函数的插值问题就是要由其在 $(n + 1)$ 个给定点的取值去反求这个次数至多为 n 的多项式。不难想到这又是一种剩余问题，所以又可以把韩信点兵法的想法直接用到插值问题。设 $\{a_i, 0 \le i \le n\}$ 是 $(n + 1)$ 个（相异）给定点。我们应该先去求解那些取值分别是 $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, 和 $(0, \ldots, 0, 1)$ 者。易见它们分别就是

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{(x - a_1)\ldots(x - a_n)}{(a_0 - a_1)\ldots(a_0 - a_n)} \\ f_1(x) &= \frac{(x - a_0)(x - a_2)\ldots(x - a_n)}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_n)} \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ f_n(x) &= \frac{(x - a_0)\ldots(x - a_{n-1})}{(a_n - a_0)\ldots(a_n - a_{n-1})} \end{aligned}$$

再者，所求在 $\{a_i, 0 \le i \le n\}$ 分别取值为 $\{b_i, 0 \le i \le n\}$ 的多项式就是

$$f(x) = b_0f_0(x) + b_1f_1(x) + \ldots + b_nf_n(x)$$

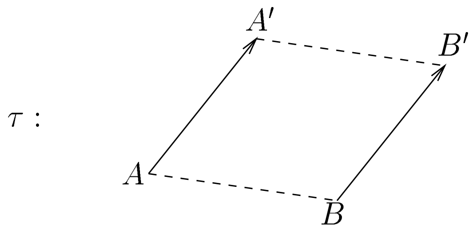
这也就是 Lagrange 插值公式。所以它其实就是韩信点兵法的直接推广。

其实韩信点兵法所创者，善用分配律把某些类型的问题的求解，归于一组简明易算的特殊解的线性组合来表达，其适用的范畴是相当广阔深远的。在现代的数学中，这种类型的问题，统称之谓线性问题；而解答线性问题的基本想法，自古至今就是韩信点兵法所首创的办法一以贯之！线性代数 (Linear Algebra) 是数学中最为简朴而又广泛有用的分支。其实，线性代数的核心思想就是把「分配律」抽象化，称之谓「线性结构」，从而达成有系统地拓展上述基本思想的用场。

在此应有一问：为什麼很多重要的基本问题会自然而然地是线性的呢？这一点可以在我们接著就要讨论的课题中看出一个梗概。

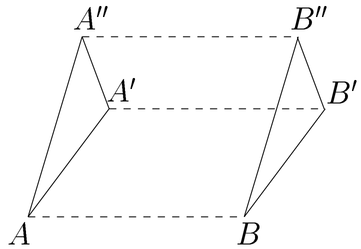
3　向量代数和空间的线性化

全空间的对称性可以用平移和旋转的组合加以系统描述。从空间的本质来看，位置乃是最为原始的事物，空间本身其实就是宇宙中所有可能的位置的总体。在几何学中以点表示位置，以直线段 $\overline{AB}$ 表达 A, B 两点之间唯一存在的最短通路。由此可见，有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 其实就是 A, B 两点在位置上的差别的具体描述，它兼有方向和距离这样两种要素。平移者，乃是将空间每点都作同向等距的位移的运动，例如向东五公尺，向北十公尺等等。



[图–5]

如 [图–5] 所示，设 A, B 是空间任给两点，A', B' 分别是 A, B 在平移 τ 之下的像点，则 $\overrightarrow{AA'}$ 和 $\overrightarrow{BB'}$ 同向平行而且等长。不难用 [图–6] 和平行四边形定理证明两个平移的组合依然是一个平移。



[图–6]

位移向量：我们将平移本身想成一种几何量，称之为位移向量，而两个平移的组合则定义为两个位移向量相加之和。

接著，我们还可以定义位移向量的倍积和内积如下：

倍积 $k \cdot \mathbf{a}$ 的定义：当 $k > 0$（及 $k < 0$）时 $k \cdot \mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}$ 同向（及反向），而且 $|k \cdot \mathbf{a}| = |k| \cdot |\mathbf{a}|$（其中 $|\cdot|$ 表示位移向量的长度）。

内积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 的定义：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}\Big\{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2\Big\}$$

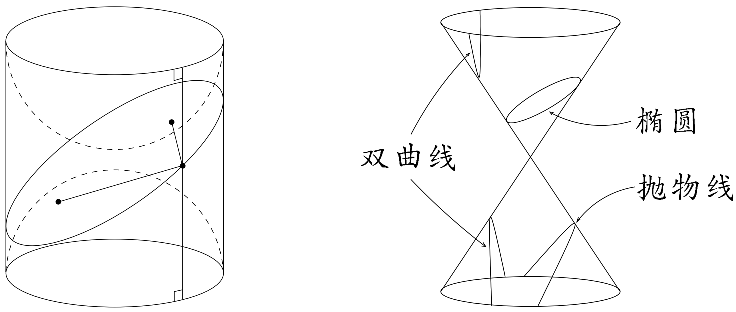
采取上述定义就可以把定量几何中的基本定理——相似三角形定理和勾股定理——分别转化为倍积和内积的分配律，即

$$k \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = k \cdot \mathbf{a} + k \cdot \mathbf{b}$$
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

分配律者，线性是也。由此可见向量代数业已简朴完备地把空间的结构全盘代数化成一种「线性代数」，所以韩信点兵法的创见自然又成为研究解析几何的有力工具。

4 圆锥截线，Kepler 行星运行三定律和牛顿万有引力定律

三角形和圆是古希腊平面几何学的主角，前者乃是最为简单的平面形，而後者则是最为完美的平面形。平面几何学的精要，自然而然地集中于它们的几何之中。在古希腊几何学家进而研讨立体几何时，球、圆柱、圆锥的几何自然也吸引了他们的专注。再由圆柱和圆锥的平面截线他们发现了另外三种曲线，亦即椭圆、双曲线和抛物线（如 [图–7] 所示）。



[图–7]

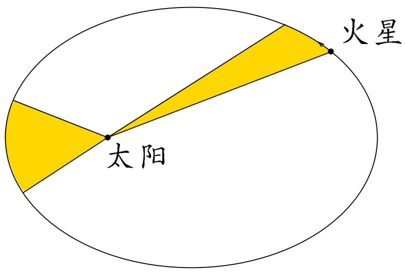
圆锥截线的研究可以说是古希腊几何学所达到的顶峰，在 Apollonius 的八册巨著中集其大成。当年对于这一类曲线的研究的动机乃是纯几何的，因为它们和圆密切相关而又比圆略为广义，所以一来它们的研究乃是当年力所能及者，二来它们又具有略逊于圆但是相近于圆的美好几何特性，所以自然而然地吸引了古希腊几何学家的专注。总之，当时绝对不会想到或期盼这类曲线会在大自然的基本定律中扮演重要角色的。

Kepler 行星运行三定律：

Kepler 行星运行三定律的发现，乃是基于 Copernicus 太阳为中心的学说和 Tyco de Brahe 毕生夜以继夜的天文观察的数据，历经二十年的艰难计算和百折不饶的探索而获得的辉煌成就。其第一、第二定律发表于 1609 年的 Astronomia Nova，而第三定律则发表于 1619 年的 Harmonices Mundi。

【第一定律】： 火星绕太阳以一个以太阳位于其焦点之一的椭圆运行。

【第二定律】： 在单位时间内，火星和太阳连线所扫过的面积恒相等。



[图–8]

【第三定律】： 太阳系中各个行星不但也满足同样的第一、第二定律，而且其轨道长径的立方和周期的平方之间的比值都是相同的。

牛顿万有引力定律：

用数理分析去研究 Kepler 行星运行三定律的力学原由，就会发现行星绕太阳运行的「原动力」乃是一种和距离平方成反比的引力。这也就是牛顿的巨著 Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687) 中的主题之一。牛顿接著再把这种引力与地球和月亮之间的引力以及地球和自由落体之间的引力作比较，从而创万有引力定律。

今天限于时间，只好把由古希腊发现圆锥截线一直到牛顿发现万有引力定律种种引人入胜的故事留作下回分解（参看讲义《圆锥截线的故事》）。

希望上述极为简略的介绍，能够初步体现基础数学在人类世代相承、精益求精理解大自然的理性文明中所扮演的角色。

对于一个有智而且有志的现代青年，他除了空间、大自然的至善至美这份大福之外，还有二福——那就是你天赋的脑力和继承的理性文明。所以应当发展而且善用你天赋的脑力，使得自己成为一个善于认识问题、善于解决问题的人。这才是知福、惜福和自求多福之道。