第一章：单元多项式的基础理论

在各种各样的代数问题中，我们是用各种代数运算（如加法、乘法等等）来分析量与量之间的代数关联。在运算过程中，运算律的普遍成立乃是常用好用的要点。这些运算律的普遍成立让我们可以系统和有效地分析所给代数问题中未知量和已知量之间的关联，从而「化未知为已知」。由于我们常用的数系运算律（如分配律、指数定则等等）对于所有数字皆普遍成立，所以其做法都可以广泛地应用到任何一个只需用到那些数系运算律的代数系统（即可以假设所处理的符号满足数系通性）。同学们在初中时所学习的多项式代数，就是上述做法的一个典型例子。

1 多项式运算

在这里我们首先列出一些关于多项式的基本事实作为复习。

1. 一个满足所有数系运算律的符号我们称之谓「不定元」(indeterminant)，通常以 x, y, z 等符号表示之（亦即 x, y, z 等符号的确实意义还有待确定；但无论如何，它们所代表的量必定会满足所有数系运算律的）。将有限个数字（称之谓「系数」(coefficients)）和不定元以加法和乘法结合起来的代数表达式，就是所谓的「多项式」(polynomial)。例如：

(i) 单项式如 $x^5, \sqrt{2}x^3, -5x^2y^3, (\sqrt{2}+\sqrt{3})xyz^2, ax^\ell y^m z^n$ 等都是多项式的特例。

(ii) $(x-a), x^3+ax^2+a^2x+a^3, (x-a)\cdot(x^3+ax^2+a^2x+a^3), x+\sqrt{2}y-\sqrt{3}z, (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx), x^3+y^3+z^3-3xyz, (x+y)^5, (x+y)^7$ 等等都是多项式。

(iii) 运用运算律（尤其是分配律），我们可以有系统地把任何多项式展开重组，把它重新表达成单项式之和。例如：

$$\begin{aligned}&(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=x^3+y^3+z^3-3xyz,\\&(x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5 \ \text{等}\end{aligned}$$

2. 在只有单个不定元的情况之下，任何多项式都能以该不定元的幂数 (powers 或 exponents) 由低幂至高幂，或由高幂至低幂顺序排列来表达之，即：

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \quad \text{或} \quad a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

前者称为升幂标准式 (ascending exponent normal form)，而後者则称为降幂标准式 (decending exponent normal form)。在上述两种表达式中，某些系数 a_i 可以是 0 的，而在习惯上我们总是会假设最高幂数的系数不等于 0（即上式中的 $a_n \neq 0$）。

3. 一个单项式的「次数」(degree) 定义为其（所有）不定元的指数之总和。例如：$\frac{1}{10}x^9$, $5^{10}x^2$, $-x^3y^2$ 和 $ax^\ell y^m z^n$ 的次数分别就是 9, 2, 5 和 $(\ell+m+n)$。而一个多项式 f 的次数则定义为实质出现在其表达式中的单项式之最高次数，记为 $\deg f$，如：

$$\begin{aligned}&f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m,\ a_m\neq 0,\ \ \deg f(x)=m;\\&g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n,\ b_n\neq 0,\qquad \deg g(x)=n\end{aligned}$$

易见 $\deg(f(x)\cdot g(x)) = m+n$，因为 $f(x)\cdot g(x)$ 包含单项式 $(a_m\cdot b_n)x^{m+n}$，而这个单项式的次数显然是在 $f(x)\cdot g(x)$ 之中最高的。因此，下述公式是显而易见的：

$$\deg(f(x)\cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x) \tag{1}$$

[注意]：一个非零常数多项式的次数我们定义为 0，而「零多项式」的次数则定义为「$-\infty$」。采用这个定义，则 (1)–式在下述特殊情况下亦可言之成理，即

$$\deg(0) = \deg(0\cdot g(x)) = \deg(0) + \deg g(x)$$

仍然成立，因为在一般的理解之下「$-\infty = -\infty +$ 任何有限整数」。

然而对于多项式的加法，我们并没有特定的公式从 $\deg f(x)$ 和 $\deg g(x)$ 来计算 $\deg(f(x)+g(x))$。在一般的情形我们至多只可以说

$$\deg(f(x)+g(x)) \le \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$$

而且等式在 $\deg f(x) \neq \deg g(x)$ 时总是成立。

[注]：当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 两者的最高次数的单项式互相抵消时，不等式 "$<$" 就会成立。

4. 令

$$\begin{aligned} f(x) &= a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0 \\ g(x) &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0 \end{aligned}$$

并假设 $\deg f(x) = m > n = \deg g(x)$，则易见

$$\deg\left((f(x) - \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}\cdot g(x))\right) < m = \deg f(x)$$

因为 $f(x)$ 与 $\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}g(x)$ 两者的最高次数单项式刚好互相抵消。其实上述运算就是我们惯用常做的多项式长除法的步骤！只需重复地做上述运算，我们最终就可得出一个 $g(x)$ 的多项式倍式，且以 $q(x)\cdot g(x)$ 记之，使得

$$\deg(f(x) - q(x)\cdot g(x)) < \deg g(x), \quad \text{或}$$
$$f(x) = q(x)\cdot g(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg g(x) \tag{2}$$

我们通常把 (2)–式称之谓「多项式的带余除式」(division algorithm for polynomials)。

[注意]：上述带余除法只适用于单元多项式的范畴。多元多项式是没有这种带余除法的！

2 多项式函数

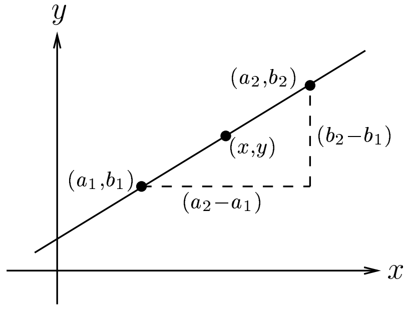
在一个系统中，当一个量的值唯一地确定另一个量的值时，我们称後者为前者的「函数」。而那些由某一个特定的多项式来表达其函数关联者，即：

$$y = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$$

就称之谓「多项式函数」，往後我们将以 $y = f(x)$ 来表达由多项式 $f(x)$ 所决定的多项式函数 y，并以 $f(a)$ 代表当 $x = a$ 时 y 所对应的值，一般称作「y（或 $f(x)$）在（位置）$x = a$ 的值」。

<u>根、值和插值问题</u>：

显然一个 1 次（或 0 次）的多项式函数是可被其在两个（或一个）位置的值所唯一地确定。因为 1 次多项式函数的图象是一条直线，所以上述现象就是对应于「相异两点定一直线」这个众所周知的几何事实。



[图–1]

例如，若 1 次多项式函数 $y = f(x)$ 满足 $b_1 = f(a_1)$ 和 $b_2 = f(a_2)$，则其表达式为：

$$(y - b_1) = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}(x - a_1)$$

上述简单事实可以自然而然地推广为下述唯一性问题，即：

【问题一】：一个 n 次多项式函数是否由其在 $(n+1)$ 个相异位置的值所唯一决定？换句话说，若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为两个次数至多为 n 的多项式，它们在 $(n+1)$ 个相异位置 $\{a_i; 0 \le i \le n\}$ 的值相同，即 $f(a_i) = g(a_i), 0 \le i \le n$，问 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否必然相等？

令 $h(x) = f(x) - g(x)$，则易见 $h(x)$ 的次数不高于 n，而且 $h(a_i) = f(a_i) - g(a_i) = 0$, $0 \le i \le n$。所以，若我们可以证明任何一个次数不高于 n 的<u>非零</u>多项式最多只能有 n 个根（即 h 取 0 为值的位置），则由此可见 $h(x)$ 必为零多项式，并给出了上述[问题一]的一个正面的解答。

【定理 1】：一个 n 次非零多项式最多只有 n 个根。再者，一个次数不高于 n 的多项式函数是可以由其在 $(n+1)$ 个相异位置的值所唯一确定。

<u>证明</u>：容易验证 $c_k(x^k - a^k) = (x - a) \cdot c_k(x^{k-1} + ax^{k-2} + \ldots + a^{k-1})$，所以

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= [c_0 + c_1 x + \ldots + c_k x^k + \ldots + c_n x^n] - [c_0 + c_1 a + \ldots + c_k a^k + \ldots + c_n a^n] \\ &= c_1(x - a) + c_2(x^2 - a^2) + \ldots + c_k(x^k - a^k) + \ldots + c_n(x^n - a^n) \\ &= (x - a) \cdot q(x) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} q(x) = c_1 + c_2(x + a) + \ldots + c_k(x^{k-1} + ax^{k-2} + \ldots + a^{k-1}) \\ + \ldots + c_n(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1}) \end{aligned}$$

所以，a 是 $f(x)$ 的一个根的充要条件为 $f(x)=(x-a)\cdot q(x)$，亦即 $(x-a)$ 是 $f(x)$ 的一个因式。如此逐步地做下去，即得当 $\{a_1,\ldots,a_k\}$ 是 $f(x)$ 的 k 个相异根时，则 $(x-a_1)\ldots(x-a_k)$ 乃是 $f(x)$ 的一个因式，亦即

$$f(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_k)\cdot g(x)$$

因此，若一个 n 次多项式 $f(x)$ 已具有 n 个相异根 $\{a_i, 1\leq i\leq n\}$，则可将 $f(x)$ 写成

$$f(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_n)\cdot g_n(x)$$

其中 $\deg g_n(x)=0$，亦即 $g_n(x)$ 其实是一个非零常数（即 $g_n(x)=c_n$）。所以，若 a 为 $\{a_i, 1\leq i\leq n\}$ 之外的任何一点，则有

$$f(a)=(a-a_1)\cdot(a-a_2)\ldots(a-a_n)\cdot c_n, \quad (a-a_i)\neq 0,\ 1\leq i\leq n$$

亦即 $f(a)$ 等于 $(n+1)$ 个非零数值之乘积，当然不会是零；所以一个 n 次非零多项式最多只有 n 个根。由此亦可推得一个次数不高于 n 的多项式函数是可以由其在 $(n+1)$ 个相异位置的值所唯一确定。 $\square$

上述「唯一性」定理很自然地带出下述「存在性」问题，即：

【问题二】：设 $\{a_i; 0\leq i\leq n\}$ 为任意给定的 $(n+1)$ 个相异位置。令 $\{b_i; 0\leq i\leq n\}$ 为任意给定的 $(n+1)$ 个值（不必相异）。问是否存在一个次数不高于 n 的多项式函数 $y=f(x)$ 使得 $f(a_i)=b_i,\ 0\leq i\leq n$？再者，若这个多项式函数是存在的（由[定理 1]知道此多项式必定是唯一的），如何去求得这个多项式呢？

（上述插值问题的完美解答其实就是韩信点兵法的直接推广，详见下一节的讨论。）

3 韩信点兵法与插值公式

在绪论中讨论到的「韩信点兵法」，乃是有系统地把余数问题归结到一组简朴的特殊解而加以组合之，是一种善用分配律的解题方法。现在让我们先重温一下「韩信点兵法」的基本想法：

在求解剩余问题时，当余数之中只有一个是 1，其他皆为 0 的特殊情形，不但容易解答，而且可以用这一系列特殊解，把一般情形的解答简洁地用下述公式表达之。设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是对于给定一组公因数为 1（亦即互质）的除数 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，其余数组分别是 $(1,0,\cdots,0), (0,1,0,\cdots,0)\cdots, (0,\cdots,0,1)$ 的特殊解，则

(3) $$x=r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_kx_k$$

乃是一个余数组是 $(r_1,r_2,\cdots,r_k)$ 的解。而且任何以 $(r_1,r_2,\cdots,r_k)$ 为余数组的解和上述 x 相差一个 $a_1a_2\cdots a_k$ 的整数倍。上述公式 (3) 之所以普遍成立的理由就是分配律。由分配律可见 r_ix_i 被 a_i 除的余数是 r_i 而且 $x-r_ix_i=\sum_{j\neq i}r_jx_j$ 被 a_i 除的余数是 0（因为每一个 $r_jx_j,\ j\neq i$, 都含有因子 a_i）。由此可见，上述算法的基本思想就是善用分配律，把剩余问题的一般情形，直截了当地归于易解好算的特殊情形来系统解答之。现在让我们再次运用这种大巧若拙的算法用来研究多项式函数的插值问题。

插值公式 (interpolation formula)：

为简化讨论起见，我们考虑 $n = 3$ 作为典型情况讨论之；由于解法是可以作明显的推广（就像余数问题一样），我们可以沿用同样方法求得在一般情况下的结果。

设 $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ 为四个相异位置，$\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ 为四个任意给定数值。则在上一节所提出的[问题二]即为：是否存在一个次数不高于 3 的多项式函数 $y = f(x)$，它在 $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ 上的值恰好就是 $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$？现在我们就用「韩信点兵法」的想法来写下上述所求的多项式 $f(x)$，直截了当地说明其存在性。

注意当 $f(x)$ 被除以 $(x - a_i)$ 时，其余数就是 $f(a_i) = b_i,\ 0 \le i \le 3$（详见[定理 1]的证明）。因此上述插值问题只是「余数问题」的直接推广，即由整数除法推广至多项式除法，而现在的除式就是 $\{(x - a_i); 0 \le i \le 3\}$。所以，我们的祖先业已教导我们应先讨论一些特殊的情况，即 $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ 分别为 $(1,0,0,0)$、$(0,1,0,0)$、$(0,0,1,0)$、$(0,0,0,1)$ 这四种情况。令 $f_i(x),\ 0 \le i \le 3,$ 分别为具有上述余数集的 3 次多项式。这样，$f_0(x)$ 乃是 $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$ 的倍式，亦即：

$$f_0(x) = c(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$$

由假设 $f_0(a_0) = 1$ 得：

$$1 = f_0(a_0) = c(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)(a_0 - a_3)$$

因此 $c = [(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)(a_0 - a_3)]^{-1}$，亦即：

$$f_0(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)(a_0 - a_3)}$$

同理可得：

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{(x - a_0)(x - a_2)(x - a_3)}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)};\\
f_2(x) &= \frac{(x - a_0)(x - a_1)(x - a_3)}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)};\\
f_3(x) &= \frac{(x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)}{(a_3 - a_0)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}
\end{aligned}$$

到此阶段，前述的插值问题的解答已是「呼之欲出」，即：

$$f(x) = b_0 f_0(x) + b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + b_3 f_3(x)$$

就是我们所要的多项式。上述想法显然是可以推广至任意 $(n+1)$ 个相异位置 $\{a_i, 0 \le i \le n\}$ 的情况，且让我们将其结论写成下述定理：

【定理 2】（拉格朗日插值公式，Lagrange interpolation formula）：设 $\{a_i; 0 \le i \le n\}$ 为任意给定的相异位置，$\{b_i; 0 \le i \le n\}$ 为任意给定的数值（不必相异），则存在唯一的多项式 $f(x)$，其次数不高于 n，使得 $f(a_i) = b_i,\ 0 \le i \le n$。再者，$f(x)$ 的明确表达式就是：

$$f(x) = b_0 f_0(x) + b_1 f_1(x) + \ldots + b_n f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i f_i(x)$$

其中

$$f_0(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\dots(a_0-a_n)} = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)\Big/\prod_{i=1}^{n}(a_0-a_i)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_j(x) = \prod_{i\neq j}(x-a_i)\Big/\prod_{i\neq j}(a_j-a_i)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x-a_i)\Big/\prod_{i=0}^{n-1}(a_n-a_i)$$

[注]：

(i) 推导上述公式的方法和我们原先在讨论 $n=3$ 时的方法其实是完全一样的；而唯一有别的地方就是要改用和、积记号如 $\sum_{i=0}^{n}$、$\prod_{i\neq j}$。

(ii) $\{a_i; 0 \le i \le n\}$ 为相异的条件保证了每个出现在公式分母中的乘积皆不为 0。

(iii) $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, $\{f_i(x)\}$ 和 $f(x)$ 之间的关系可以简洁地用下表表示之：

x	a_0	a_1	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_n
$f_0(x)$	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0
$f_1(x)$	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$f_i(x)$	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$f_n(x)$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f(x)$	b_0	b_1	$\cdots$	b_i	$\cdots$	b_n

而结论「$f(x)$ 就是 $\sum_{i=0}^{n} b_i f_i(x)$」则可以由下述公式

$$f(a_j) = \sum_{i=0}^{n} b_i f_i(a_j) = b_i$$

所得出，因为 $f_j(a_j)=1$，而对于其他所有 $i \neq j$ 而言，$f_i(a_j)=0$。

(iv) 上述的插值公式让我们可以把一个「尚待确定」的多项式的样子，用它在不同地方的值直截了当地写下来。这个尚待确定的多项式往往就是一些未知的理论公式或实验公式，所以插值公式不管在理论上或实际应用上都是很重要的。在下一节的讨论中，我们将会应用插值法来研究「求和公式」的性质和其明确表达式。

4 求和公式

现在让我们先看一看几个简单的求和公式的例子：

(i) $S_n = 0+1+2+\ldots+(n-1) = \dfrac{1}{2}n(n-1)$

在历史上这个级数的求和公式可以用下述巧妙的方法来发现，即

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} & S_n = & 0 & + & 1 & + & 2 & + \ldots + & (n-1) \\ +) & S_n = & (n-1) & + & (n-2) & + & (n-3) & + \ldots + & 0 \\ \hline & 2S_n = & (n-1) & + & (n-1) & + & (n-1) & + \ldots + & (n-1) = n\cdot(n-1) \end{array}$$

所以

$$S_n = \frac{1}{2}n(n-1)$$

(ii) 运用同样方法也可以找出下述等差级数的求和公式：

$$\widetilde{S}_n = a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+\big[a+(n-1)d\big] = \frac{1}{2}n\big[2a+(n-1)d\big]$$

即以互逆方向相加 $\widetilde{S}_n+\widetilde{S}_n$，得出

$$2\widetilde{S}_n = \big[2a+(n-1)d\big]+\big[2a+(n-1)d\big]+\ldots+\big[2a+(n-1)d\big] = n\cdot\big[2a+(n-1)d\big]$$

其实，我们还可以应用已知 S_n 的公式来间接地求得上述公式：

$$\sum_{i=0}^{(n-1)}(a+id) \overset{(\text{分配律})}{=} n\cdot a+d\cdot\sum_{i=0}^{(n-1)} i = n\cdot a+d\cdot\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n\big[2a+(n-1)d\big]$$

(iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{(n-1)} i^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$

据历史记载，古代中国和古希腊的数学家都知道上述级数的求和公式，但是他们究竟是如何求得此公式，现已无法考证了。不过，只要他们能够从某些途径或想法得出一个正确的「猜想公式」，再去验证这个猜想公式的真确性其实并不是一件很困难的事情。以现今方法，验证工作只需要证明下述恒等式：

$$\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+n^2 \overset{?}{\equiv} \frac{1}{6}(n+1)\cdot n\cdot(2n+1)$$

以此恒等式所提供者作为「归纳步骤」，就可以用数学归纳法来证明上述求和公式的真确性。

(iv) 其实古代中国和古希腊的数学家亦知道另一个类似的求和公式：

$$\sum_{i=0}^{(n-1)} \frac{1}{2}i(i-1) = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

同理，以现今的方法我们只需验证：

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)+\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{6}n(n-1)\big[n-2+3\big] = \frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$$

即可用归纳法证得上述求和公式的真确性。

由此可见，假若我们能够从某些途径找出一个正确的猜想公式，则余下所需的验证工作其实是相当简单的「归纳证明」。因此，问题的要点在于怎样去发现和写出这个「尚待确定」的求和公式。现在，让我们应用插值法来找出一个「有系统的」求和公式探讨，作为插值法应用的一个例子。

首先，如「韩信点兵法」所示，我们不妨先把问题放在一个适当广度的范畴来讨论：

【问题三】：给定任意的多项式 $f(x)$，如 $1, x, x^2, x^3$，或 $\frac{1}{2}x(x-1), \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$ 等等，怎样找出求和公式 $S_f(n)$ 来计算下述级数之总和

$$\sum_{i=0}^{(n-1)} f(i) = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) = ?$$

亦即要找出适当公式 $S_f(n)$ 使得

$$\sum_{i=0}^{(n-1)} f(i) = S_f(n)$$

对于所有正整数 $n = 1, 2, 3, \ldots$ 皆成立。

分析：

(i) 不妨先假设上述求和公式 $S_f(n)$ 是 n 的多项式。则 $S_f(n)$ 满足下述的特徵性质：

$$\begin{aligned} &S_f(n+1) - S_f(n) = f(n), \\ &S_f(0) = 0 \quad [\text{零项的总和当然应该是 } 0] \end{aligned}$$

(ii) 反之，假若有一个多项式 $S_f(x)$ 满足条件 $S_f(0) = 0$ 和

$$S_f(x+1) - S_f(x) = f(x)$$

其中的 $S_f(x+1)$ 表示把 $S_f(x)$ 内所有的 x 都换成 $x+1$ 者，则

$$\begin{aligned} &S_f(i+1) - S_f(i) = f(i), \quad i \geq 0 \\ &\sum_{i=0}^{(n-1)} f(i) = \sum_{i=0}^{(n-1)} \big(S_f(i+1) - S_f(i)\big) = S_f(n) - S_f(0) = S_f(n) \end{aligned}$$

【定理 3】：给出任何一个 k 次多项式 $f(x)$，存在一个唯一的 $k+1$ 次多项式 $S_f(x)$，它满足条件 $S_f(0) = 0$ 和 $S_f(x+1) - S_f(x) = f(x)$，亦即

$$\sum_{i=0}^{(n-1)} f(i) = S_f(n)$$

对于所有正整数 $n = 1, 2, 3, \ldots$ 皆成立。

证明：让我们先对 k 用归纳法来证明 $S_f(x)$ 的存在性。当 $k = 0$ 时，$f(x)$ 实质上是一个常数，即 $f(x) \equiv c$。易知这时 $S_f(x) = cx$，亦即

$$S_f(x+1) - S_f(x) = c(x+1) - cx = c = f(x)$$

归纳假设对所有次数不高于 k 的多项式 $f(x)$，求和公式 $S_f(x)$ 皆存在，而且其次数不高于 $k+1$；现在进而证明对任意给出的 $(k+1)$ 次多项式 $f(x)$，其所相应的 $S_f(x)$ 的存在性如下。令

$$
\begin{aligned}
&f(x) = cx^{k+1} + g(x), \quad \deg g(x) \le k \\
&\frac{c}{k+2}\big[(x+1)^{k+2} - x^{k+2}\big] = cx^{k+1} + h(x)
\end{aligned}
$$

易见

$$(x+1)^{k+2} = x^{k+2} + (k+2)x^{k+1} + \text{不高于 } k \text{ 次的多项式}$$

所以有 $\deg h(x) \le k$ 和 $\deg(g(x) - h(x)) \le k$。由归纳假设得知存在一个次数不高于 $(k+1)$ 的多项式 $G(x)$ 使得：

$$G(0) = 0 \quad \text{和} \quad G(x+1) - G(x) = g(x) - h(x)$$

令

$$S_f(x) = \frac{c}{k+2}x^{k+2} + G(x)$$

则 $S_f(0) = 0$ 和

$$
\begin{aligned}
S_f(x+1) - S_f(x) &= \frac{c}{k+2}\big[(x+1)^{k+2} - x^{k+2}\big] + \big[G(x+1) - G(x)\big] \\
&= cx^{k+1} + h(x) + \big[g(x) - h(x)\big] \\
&= cx^{k+1} + g(x) = f(x)
\end{aligned}
$$

这样便归纳地证明了 $S_f(x)$ 的存在性。

至于 $S_f(x)$ 的唯一性则可以由[定理 1]的结论和 $S_f(x)$ 的特徵性质：

$$\sum_{i=0}^{(n-1)} f(i) = S_f(n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

直接推论而得。 □

[注]：当求和公式的存在性和唯一性业已验证妥当後，插值法便提供了一种非常有效的方法来求出 $S_f(x)$ 的明确公式。

一个 k 次多项式 $f(x)$ 是可以由其 $(k+1)$ 个值 $\{f(i); 0 \le i \le k\}$ 所唯一确定。而相应的求和公式 $S_f(x)$，由于它是 $(k+1)$ 次多项式，则需要由其 $(k+2)$ 个值所决定，即

$$
\begin{aligned}
&S_f(0) = 0,\ S_f(1) = f(0),\ S_f(2) = f(0) + f(1), \ldots \\
&S_f(k+1) = f(0) + f(1) + \ldots + f(k)
\end{aligned}
$$

因此，我们很自然地便想到可以用插值法来从上述 $(k+2)$ 个接连的和值来求出 $S_f(x)$ 的明确公式。

<u>一系列特殊的多项式</u>：令

$$
\begin{aligned}
&g_0(x) = 1,\ g_1(x) = x,\ g_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1), \ldots, \\
&g_k(x) = \frac{1}{k!}x(x-1)\ldots(x-k+1), \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

上述 $g_k(x)$ 的选取是使得 $g_k(i)=0, 0\leq i\leq (k-1)$ 和 $g_k(k)=1$，所以 $g_k(n)$ 的首 k 个总和皆为 0（即 $S_{g_k}(i)=0, 1\leq i\leq k$），而第 $(k+1)$ 个总和是 1（即 $S_{g_k}(k+1)=1$）。这刚好表示 $g_k(x)$ 的求和公式其实就是此系列多项式的下一位成员，即

$$S_{g_k}(x)=g_{k+1}(x)$$

上述极为简洁的关系式自然而然地成为我们用来寻找求和公式的有效工具（就像在余数问题中的 $x_1,\ldots,x_k$ 一样）。给定任意一个 ℓ 次的多项式 $f(x)$，其求和公式 $S_f(x)$ 可以用下述方法来有系统地确定之：

(i) 首先要注意 $f(x)$ 是可以唯一地写成 $\{g_k(x); 0\leq k\leq \ell\}$ 的常数倍之组合，亦即存在系数集 $\{c_k; 0\leq k\leq \ell\}$ 使得

$$f(x)=c_0g_0(x)+c_1g_1(x)+\ldots+c_kg_k(x)+\ldots+c_\ell g_\ell(x)=\sum_{k=0}^{\ell}c_kg_k(x)$$

上述组合一般称之为 $\{g_k(x), 0\leq k\leq \ell\}$ 的「线性组合」(linear combination)。

(ii) 然後，由分配律可得：

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{(n-1)}f(i) &= \sum_{i=0}^{(n-1)}\big(c_0g_0(i)+c_1g_1(i)+\ldots+c_kg_k(i)+\ldots+c_\ell g_\ell(i)\big)\\ &= c_0\sum_{i=0}^{(n-1)}g_0(i)+\ldots+c_k\sum_{i=0}^{(n-1)}g_k(i)+\ldots+c_\ell\sum_{i=0}^{(n-1)}g_\ell(i)\\ &= c_0g_1(n)+c_1g_2(n)+\ldots+c_kg_{k+1}(n)+\ldots+c_\ell g_{\ell+1}(n)\end{aligned}$$

即

$$S_f(x)=\sum_{k=0}^{\ell}c_kg_{k+1}(x)$$

由此可见若可求得系数集 $\{c_k; 0\leq k\leq \ell\}$，则可立即写下这个待定的 $S_f(x)$ 的明确表达式。所以接著的讨论就是如何有效地从 $\{f(i); 0\leq i\leq \ell\}$ 这 $(\ell+1)$ 个值来确定系数集 $\{c_k; 0\leq k\leq \ell\}$。

(iii) 首个系数 c_0 显然等于 $f(0)$，因为 $g_k(0)=0, k>0$。为了方便描述从 $\{f(i); 0\leq i\leq \ell\}$ 求得对应系数集 $\{c_k; 0\leq k\leq \ell\}$ 的系统方法，我们引进下述运算符号（称之为差分算子，difference operator）：

$$\triangle f(x)=f(x+1)-f(x)$$

不难直接验证 $\triangle$ 算子具有下述易算好用的性质：

$$\triangle(f(x)+h(x))=\triangle f(x)+\triangle h(x),\quad \triangle(cf(x))=c\,\triangle(f(x))$$

另一方面，因为 $g_k(x)$ 是 $g_{k-1}(x)$ 的求和公式，易见

$$\triangle g_k(x)=g_k(x+1)-g_k(x)=g_{k-1}(x)$$

由此可得

$$\triangle f(x)=\triangle\big(c_0+c_1g_1(x)+\ldots c_\ell g_\ell(x)\big)=0+c_1g_0(x)+c_2g_1(x)+\ldots+c_\ell g_{\ell-1}(x)$$

即

$$c_1=\triangle f(0)=f(1)-f(0)$$

再次应用 $\triangle$ 算子，我们便可以如下算出下一个系数 c_2：

$$\triangle^2 f(x)=c_2g_0(x)+c_3g_1(x)+\ldots+c_\ell g_{\ell-2}(x)$$

$$\begin{aligned}c_2=\triangle^2 f(0)=\triangle f(1)-\triangle f(0)&=\big(f(2)-f(1)\big)-\big(f(1)-f(0)\big)\\&=f(2)-2f(1)+f(0)\end{aligned}$$

如此类推，我们不断重复应用 $\triangle$ 算子，然後再代入 $x=0$，便可逐步从 $\{f(i);0\le i\le\ell\}$ 求得 $\{c_k;0\le k\le\ell\}$：

$$\begin{gathered}(c_0=)\ f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ldots\ldots,f(\ell-1),f(\ell)\\(c_1=)\triangle f(0),\triangle f(1),\triangle f(2),\ldots\ldots,\triangle f(\ell-1)\\(c_2=)\triangle^2 f(0),\triangle^2 f(1),\ldots\ldots,\triangle^2 f(\ell-2)\\(c_3=)\triangle^3 f(0),\ldots\ldots,\triangle^3 f(\ell-3)\\\vdots\qquad\vdots\\(c_\ell=)\triangle^\ell f(0)\end{gathered}$$

[下一层的数值是由上一层相邻的两个数值之差所得出的。]

【例子】：

(i) $\underline{f(x)=x^2}$

$$\begin{array}{ccccc}0&&1&&4\\&1&&3&\\&&2&&\end{array}$$

$f(x)=g_1(x)+2g_2(x)$

$S_f(x)=g_2(x)+2g_3(x)=\dfrac{1}{6}x(x-1)(2x-1)$

(ii) $\underline{f(x)=x^3}$

$$\begin{array}{ccccccc}0&&1&&8&&27\\&1&&7&&19&\\&&6&&12&&\\&&&6&&&\end{array}$$

$f(x)=g_1(x)+6g_2(x)+6g_3(x)$

$S_f(x)=g_2(x)+6g_3(x)+6g_4(x)=\dfrac{1}{4}x^2(x-1)^2$

(iii) $\underline{f(x) = x^4}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 1^4 & & 2^4 & & 3^4 & & 4^4 \\ & 1 & & 15 & & 65 & & 175 & \\ & & 14 & & 50 & & 110 & & \\ & & & 36 & & 60 & & & \\ & & & & 24 & & & & \end{array}$$

$f(x) = g_1(x) + 14g_2(x) + 36g_3(x) + 24g_4(x)$

$S_f(x) = g_2(x) + 14g_3(x) + 36g_4(x) + 24g_5(x)$

5 二项定理

当 n 为 $2, 3, 4, 5$ 等等这些较低的指数时，不难直接运用分配律归纳地写下 $(x+y)^n$ 的展开式：

$$\begin{aligned} &n = 0 : (x+y)^0 = 1 \\ &n = 1 : (x+y)^1 = x + y \\ &n = 2 : (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\ &n = 3 : (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ &n = 4 : (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ &n = 5 : (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \end{aligned}$$

假如把上述每个展开式中的 $x^{n-k}y^k$ 的系数分离出来，我们发现它们之间可以自然而然地排列成下述三角阵式，并且满足一种简单的构造规律。这个三角阵式我们称之谓「贾宪三角」或「杨辉三角」，而在西方则称之谓「柏斯加三角」(Pascal triangle)。

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ & & & \vdots & & & & & & \vdots & & & \end{array}$$

令

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k \tag{4}$$

则有

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = x \cdot (x+y)^n + y \cdot (x+y)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(C_k^n + C_{k-1}^n\right) x^{n+1-k} y^k \quad \text{（补上 } C_{n+1}^n = 0 = C_{-1}^n\text{）} \end{aligned}$$

另一方面，由 C_k^n 的定义式 (4) 得

$$(x+y)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}C_k^{n+1}x^{n+1-k}y^k$$

由此可得

$$C_k^{n+1}=C_k^n+C_{k-1}^n \quad (\Leftrightarrow C_k^{n+1}-C_k^n=C_{k-1}^n)$$

这个归纳递推公式 (inductive recurrence relation) 来表达那些系数与系数之间的关系，亦即可以用 $(x+y)^n$ 展开後的系数来表达 $(x+y)^{n+1}$ 展开後的系数。这也就是描述上述三角阵式的构造规律。

现在让我们从另一角度来看看上述递推公式的意义。先把某一个 $k\geq 0$ 固定不动，然後将 C_k^n 看成一个函数 $f_k(x)$ 在 $x=n$ 时的取值。易见

$$f_0(x)\equiv 1,\quad f_1(x)=x \quad （因为\ C_1^n=n）$$

则前述的递推公式可以重新写成

$$f_k(n+1)-f_k(n)=f_{k-1}(n) \quad （即\ C_k^{n+1}-C_k^n=C_{k-1}^n）$$

显然上述的讨论说明了

$$\triangle f_k(x)=f_{k-1}(x) \ \Leftrightarrow\ f_k(x)=S_{f_{k-1}}(x)$$

亦即上述所定义的一系列函数 $\{f_k(x),\, k=0,1,2,\dots\}$ 刚好就是在前一章寻找求和公式时引入的特殊函数集 $\{g_k(x),\, k=0,1,2,\dots\}$。

【定理 2.1】二项定理 (The Binomial Theorem)：

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n x^{n-k}y^k$$

而其中出现的二项式系数 (binomial coefficients) C_k^n 的明确表达式就是

$$C_k^n=g_k(n)=\frac{1}{k!}n(n-1)\dots(n-k+1)=\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0!=1)$$

【推论一】：$C_k^n=C_{n-k}^n$。

【推论二】：$\sum_{k=0}^{n}C_k^n=(1+1)^n=2^n,\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_k^n=(1-1)^n=0$。

6　泰勒公式与多项式的局部展开式

设 $f(x)$ 为一个给定的多项式，a 为一个给定点。若我们把 x 局限于 a 的（足够小）邻近时，$f(x)$ 在这个范围的性质便称之为 $f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域的「局部性质」(local properties)。当我们研究 $f(x)$ 的局部性质时，宜以 $x=a+t$ 代入然後以二项定理把 $f(x)=f(a+t)$ 展开为 t 的升幂标准式，其中 $|t|$ 是足够小者，因而展开後的各项的绝对值乃是随著 t 的次数的升高而大幅缩小，因此它们的局部影响力显然是高次项要远小于低次项，可以说乃是「阶段分明，一目了然」者也。总之，这是一种常用、好用的办法，例如：

(i) $f(x)=x^3$：

$$f(a+t)=a^3+3a^2t+3at^2+t^3$$

(ii) $f(x)=x^3-2x^2+5x+1$：

$$f(a+t)=(a^3-2a^2+5a+1)+(3a^2-4a+5)t+(3a-2)t^2+t^3$$

(iii) $f(x)=cx^n$：

$$f(a+t)=ca^n+nca^{n-1}t+\frac{n(n-1)}{2}ca^{n-2}t^2+\ldots+ct^n \tag{5}$$

由上述「局部展开」(local expansion) 的例子可见，引进下述对于多项式的形式运算(formal operation) 将会有很大的用途：

【定义】：设 $f(x)$ 为任意给定的多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

定义算子 D 为把 $f(x)$ 变成下述多项式 $Df(x)$ 的形式运算：

$$Df(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}ia_ix^{i-1}$$

再者，定义 D^k 为上述形式运算 D 的重复 k 次者（D^0 表示不作运算）。例如：

$$D^2f(x)=2a_2+6a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{i=2}^{n}i(i-1)a_ix^{i-2}$$
$$D^k(x^n)=n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}=k!\,C_k^nx^{n-k}$$

易证上述所定义的算子 D 满足下述简单好用的性质，即

$$D\big(c_1f_1(x)+c_2f_2(x)\big)=c_1Df_1(x)+c_2Df_2(x) \tag{6}$$

（事实上，D 本身就可以用上述性质和基本定义 $D(x^n)=nx^{n-1}$ 所唯一确定者。）

运用算子符号 D，我们可以把 (5)–式中的 $f(x)=cx^n$ 局部展开式重新写成下述非常简洁的形式，即

$$f(a+t)=f(a)+Df(a)t+\frac{D^2f(a)}{2!}t^2+\ldots+\frac{D^nf(a)}{n!}t^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{D^kf(a)}{k!}t^k$$

在 $f(x)=x^n$ 的特殊情形，上述公式其实就是二项定理的另一写法，也许大家会问这岂非仅是旧酒装新瓶的做法？但其实不然！上述公式乃是带领著我们迈向一个崭新的领域，它开启了进入微分学范畴的大门。

【定理 2.2】多项式的泰勒公式 (Taylor's formula for polynomials)：设 $f(x)$ 为一个 n 次多项式，则

$$f(a+t)=f(a)+Df(a)t+\frac{D^2f(a)}{2!}t^2+\ldots+\ldots+\frac{D^nf(a)}{n!}t^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{D^kf(a)}{k!}t^k$$

[注]：上述局部展开式在 $k=n$ 时会自然终止，因为对于所有 $k>n=\deg f(x)$ 来说，$D^kf(x)\equiv 0$。

证明：我们采用归纳法按多项式次数 n 作归纳证明。$\deg f(x)=0$ 时的情况是显而易见的，现在归纳假设泰勒公式已对于所有次数不高于 $(n-1)$ 的多项式普遍成立。令 $f(x)$ 为任意一个 n 次的多项式，把 $f(x)$ 重新写成：

$$f(x)=cx^n+f_2(x)=f_1(x)+f_2(x),\quad \deg f_2(x)\leq n-1$$

则由归纳假设可得

$$f_2(a+t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^kf_2(a)t^k\qquad (D^nf_2(a)=0)$$

由前述 cx^n 的展开式例子（即 (5)–式）：

$$f_1(a+t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^kf_1(a)t^k$$

由此可得

$$\begin{aligned}f(a+t)&=f_1(a+t)+f_2(a+t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^kf_1(a)t^k+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^kf_2(a)t^k\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\big(D^kf_1(a)+D^kf_2(a)\big)t^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^kf(a)t^k\quad \text{（见 (6)–式）}\end{aligned}$$

□

【推论一】：当 $f(x)$ 被除以 $(x-a)^k$ 时，其余式为：

$$f(a)+Df(a)(x-a)+\ldots+\frac{1}{(k-1)!}D^{k-1}f(a)(x-a)^{k-1}$$

证明：

$$\begin{aligned}f(x)&=f(a+(x-a))=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}D^jf(a)(x-a)^j\\&=\left\{\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j!}D^jf(a)(x-a)^{(j-k)}\right\}\cdot(x-a)^k+\left\{\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}f(a)(x-a)^j\right\}\end{aligned}$$

□

【推论二】：$f(x)$ 可被 $(x-a)^2$ 整除的充要条件为 $f(a)=0$ 和 $Df(a)=0$，即 $x=a$ 是 $f(x)$ 和 $Df(x)$ 的公共根，亦即 $(x-a)$ 是 $f(x)$ 和 $Df(x)$ 的一个公因式。

【推论三】：$D\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\big(Df(x)\big)\cdot g(x)+f(x)\cdot Dg(x)$。

<u>证明</u>：只需证明对任意 a 恒有

$$D(f\cdot g)(a)=Df(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot Dg(a)$$

由[推论一]知

$$\begin{aligned} f(x)&=q_1(x)\cdot(x-a)^2+[f(a)+Df(a)(x-a)]\\ g(x)&=q_2(x)\cdot(x-a)^2+[g(a)+Dg(a)(x-a)]\\ f(x)\cdot g(x)&=q_3(x)\cdot(x-a)^2+[f(a)\cdot g(a)+D(f\cdot g)(a)(x-a)]\end{aligned}$$

把上述的第一式和第二式相乘後可得

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x)=&\big\{q_1(x)\cdot g(x)+q_2(x)\cdot[f(a)+Df(a)(x-a)]+Df(a)\cdot Dg(a)\big\}\cdot(x-a)^2\\ &+\big\{f(a)\cdot g(a)+[Df(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot Dg(a)](x-a)\big\}\end{aligned}$$

现在，把上述两种 $f(x)\cdot g(x)$ 的展开式中的 $(x-a)$ 项作一比较，即得所求证的等式 $D(f\cdot g)(a)=Df(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot Dg(a)$，亦即

$$D(f\cdot g)=Df\cdot g+f\cdot Dg \qquad \square$$

【习题】：

(1) 试证明
$$D(f\cdot g\cdot h)=(Df)\cdot g\cdot h+f\cdot(Dg)\cdot h+f\cdot g\cdot(Dh)$$

(2) 试以归纳法证明
$$D[f(x)^n]=n[f(x)]^{n-1}\cdot Df(x)$$

(3) $D[(x^2+x+1)^5]=?$

(4) 试证 $D^2(f(x)\cdot g(x))=D^2(f(x))+2D(f(x))D(g(x))+D^2(g(x))$。问 $D^3(f(x)\cdot g(x))=?$ 能否给出 $D^n(f(x)\cdot g(x))$ 的公式？

【定义】：若 $f(x)$ 含有因式 $(x-a)^2$，则称 a 为 $f(x)$ 的一个重根。若 $f(x)$ 含有因式 $(x-a)^k$, $k\geq 2$, 而<u>不</u>含有因式 $(x-a)^{k+1}$，则称 a 为 $f(x)$ 的 k–重根。

[注]：若 $k=1$，则称 a 为 $f(x)$ 的一个单根。有时候为了方便讨论起见，我们会把单根的情况当作 1–重根来讨论。

(5) 设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $Df(x)$ 的最高公因式，试证 a 为 $f(x)$ 的重根的充要条件就是 a 为 $d(x)$ 的根。

[注]：所以，若 $f(x)$ 和 $Df(x)$ 互素，亦即 $d(x)\equiv 1$，则 $f(x)$ 不可能有任何重根。

(6) 试证 a 是 $f(x)$ 的 k–重根 $(k\geq 2)$ 的充要条件乃是 a 是 $f(x)$ 的根和 $Df(x)$ 的 $(k-1)$–重根。

【定义】：给定某一点 $x=a$，若存在有一个足够小的 $\delta>0$ 使得对于所有满足 $|x-a|<\delta$ 的 x 恒有

$$f(x) \geq f(a) \quad (\text{或 } f(x) \leq f(a))$$

则称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的局部极小点（或局部极大点）。

(7) 假设 $Df(a)=0$ 及 $D^2f(a)>0$（或 $D^2f(a)<0$）。那麼 $x=a$ 是否 $f(x)$ 的一个局部极小点（或局部极大点）？为什麼？

(8) 设 $Df(a)=D^2f(a)=\ldots=D^{k-1}f(a)=0$ 但 $D^kf(a)\neq 0$。$f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域的局部性质应是怎样？

[提示：分开处理 k 为奇、偶数的情况。注意 $f(x)$ 与 $y=\frac{1}{k!}D^kf(a)\cdot(x-a)^k$ 在 $x=a$ 的邻域的局部性质极为相似。]

7 泰勒公式与局部分析：局部性质和局部逼近

从代数学方面来说，上一节所导出的多项式泰勒公式已经是二项定理的一个深远推广。其实，泰勒公式不单只是二项定理的一个推广公式，它也是研究一般函数局部性质的重要工具。在这一节里我们暂且集中讨论泰勒公式在多项式函数的应用，其研讨方法也自然而然地带领著我们迈向微分学的范畴。

局部性质和局部逼近 (local properties and local approximations)：

首先让我们清楚界定「局部性质」的明确意义。若一个给定函数 $y=f(x)$ 的某些性质只取决于该函数在 $x=a$ 的足够小邻近内的值（即只需把 $f(x)$ 局限于 $|x-a|<\delta$ 的范围内，其中 δ 为一个足够小的正实数），则称该性质为 $f(x)$ 在 $x=a$ 时的局部性质。例如：

(i) 我们称 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 时有「局部极小值」（或局部极大值）$f(a)$，其意义为

$$f(x) \geq f(a) \quad (\text{或 } f(x) \leq f(a))$$

对于所有 x 在 $x=a$ 的足够小邻近内恒成立。

(ii) 我们称 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 的足够小邻近内是「递增」的（或递减的），其意义为

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) \geq f(x_2))$$

能对于所有满足 $(a-\delta)<x_1<x_2<(a+\delta)$ 的 x_1, x_2 恒成立。

接著请同学们留意下述一个十分简单的事实。在应用泰勒公式于研究函数的局部性质的时候，它将会扮演著一个很常用的角色。

【基本事实一】：一个微小量的高次幂的绝对值要远比其低次幂的绝对值为小。例如，设

$$|\Delta x| \leq \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$$

则

$$|\Delta x^{k+1}| = |\Delta x|^{k+1} \leq 10^{-6} \cdot |\Delta x^k|$$

亦即 $|\Delta x^{k+1}|$ 的值会小于 $|\Delta x^k|$ 的值的百万分之一。

在研究函数的局部性质时，我们惯用 Δx 来代表 $(x-a)$，并且会假设 $|\Delta x|$ 为足够小的值。所以，在研究多项式函数 $f(x)$ 于 $x=a$ 的局部性质时中，由泰勒公式所得的展开式

$$f(x) = f(a) + Df(a) \cdot \Delta x + \frac{1}{2}D^2 f(a)\Delta x^2 + \ldots = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a) \cdot \Delta x^k$$

我们容易看见下述另一个基本事实：

【基本事实二】：设 $D^k f(a)$ 为 $D^i f(a)$ $(1 \leq i \leq n)$ 列中的<u>第一个</u>非零值，则

$$g(x) = f(a) + \frac{1}{k!} D^k f(a)\Delta x^k \quad (\Delta x = (x-a))$$

为 $f(x)$ 于 $x=a$ 的一个「k–阶」的局部逼近函数，亦即

$$f(x) - g(x) = \sum_{\ell=k+1}^{n} \frac{1}{\ell!} D^\ell f(a)\Delta x^\ell$$

的绝对值要远比 $\frac{1}{k!}D^k f(a)\Delta x^k$ 的绝对值小。因此，有很多 $f(x)$ 的局部性质都会和逼近函数 $g(x)$ 的局部性质相同，所以我们不妨改用较为简单的 $g(x)$（一个 k 次的多项式函数）来研究 $f(x)$（一个次数至少为 k 的多项式函数）的那些局部性质。上述看似单纯的想法其实业已蕴含著很有用的局部逼近方法！

【引理】：若 $Df(a) > 0$（或 $Df(a) < 0$），则 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 的邻近范围是递增的（或递减的）。

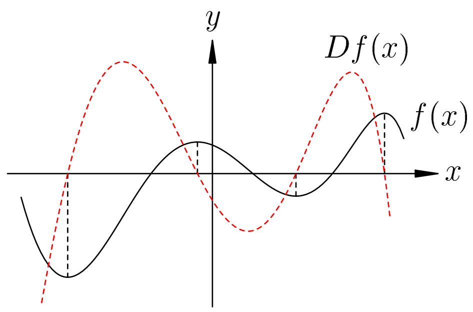
<u>想法</u>：此事严格证明需要用到微分均值定理，在此只写出大约想法。$y = f(x)$ 可用下述函数来局部逼近：

$$f(a) + Df(a)\Delta x = f(a) + Df(a) \cdot (x-a)$$

当 $Df(a) > 0$（或 $Df(a) < 0$）时，上述函数显然会在 $x = a$ 邻近范围内递增（或递减）。[$Df(a)$ 实际上就是上述线性函数的斜率。] $\square$

<u>单调区间和极大、极小点</u>：

给出一个 n 次多项式 $f(x)$，则 $Df(x)$ 为一个 $(n-1)$ 次多项式。若把整条实数轴以 $Df(x)$ 的适当零点分割为一些开区间线段，使得在每一个区间中 $Df(x)$ 维持其正负号不变（并假设由一个区间走向相邻区间时 $Df(x)$ 会改变其正负号），则由上述引理易知 $y = f(x)$ 在每一个区间中恒为单调递增或单调递减（由 $Df(x)$ 在其上的正负号决定之）。我们把这些区间称为函数 $f(x)$ 的「单调区间」。再者，那些单调区间的分点 $\{a_j\}$ 乃是函数 $f(x)$ 改变其单调性的转向点，易见若 $f(x)$ 由 $\nearrow$ 改变为 $\searrow$，则转向点为其局部极大点；若 $f(x)$ 由 $\searrow$ 改变为 $\nearrow$，则转向点为其局部极小点。



[图–2]

【例一】：$y = f(x) = Ax^2 + Bx + C,\ A > 0$

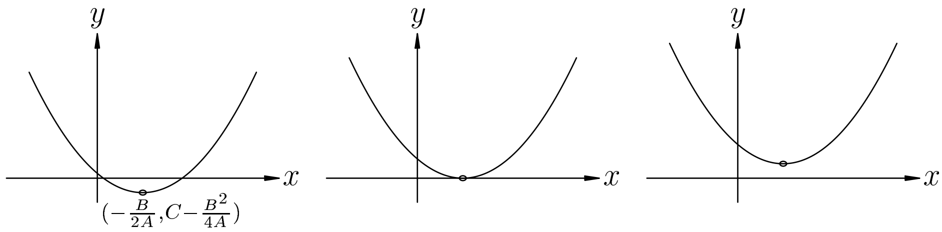
$$Df(x) = 2Ax + B,\ \text{而在}\ a_1 = -\tfrac{B}{2A}\ \text{时}\ Df(a) = 0$$

$$a \left\{ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \right\} -\frac{B}{2A}, \quad Df(a) \left\{ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \right\} 0$$

$$\Rightarrow\ a = -\frac{B}{2A}\ \text{乃是其极小点，而其极小值为}\ f(-\frac{B}{2A}) = C - \frac{B^2}{4A}$$

其实，二次函数的极值问题亦可以用配方法得之，即

$$f(x) = A(x + \frac{B}{2A})^2 + (C - \frac{B^2}{4A}) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq (C - \frac{B^2}{4A})$$



(i) $B^2 - 4AC > 0$ (ii) $B^2 - 4AC = 0$ (iii) $B^2 - 4AC < 0$

[图–3]

【例二】：$f(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + D$

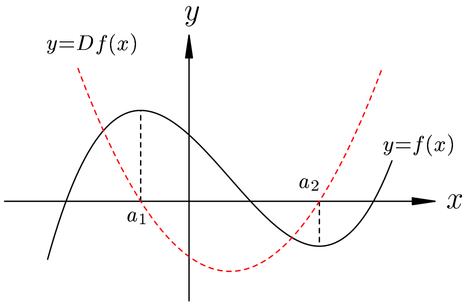
由[例一]的讨论，可见 $Df(a)$ 的正负区间有下述三种情形，即

$$\text{(i)}\ B^2 - 3C > 0, \quad \text{(ii)}\ B^2 - 3C = 0, \quad \text{(iii)}\ B^2 - 3C < 0$$

我们现在分别讨论上述每一个情况：

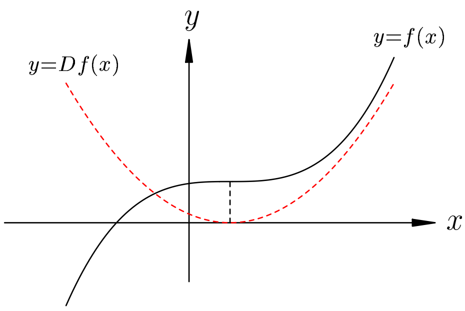
(i) $B^2 - 3C > 0$：在此情况，$Df(x) = 0$ 有两个相异的根 $\{a_1, a_2\}$。两者把实数轴分为三个 $f(x)$ 的单调区间，即

x		a_1		a_2	
$Df(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$



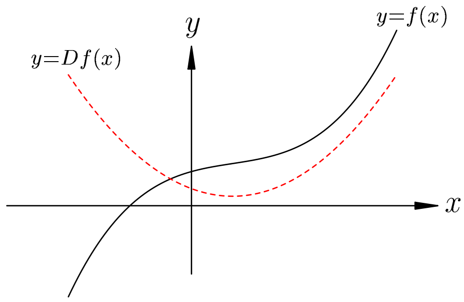
[图–4]

(ii) $B^2-3C=0$：在此情况，我们恒有 $Df(x)\geq 0$，因此 $f(x)$ 在整条实数轴上是单调递增的。



[图–5]

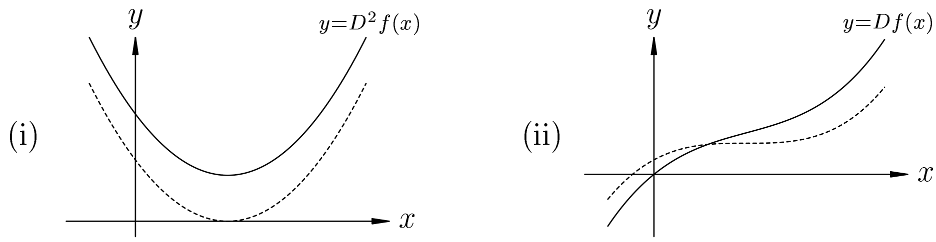
(iii) $B^2-3C<0$：在此则恒有 $Df(x)>0$，因此 $f(x)$ 在整条实数轴上是严格单调递增的。



[图–6]

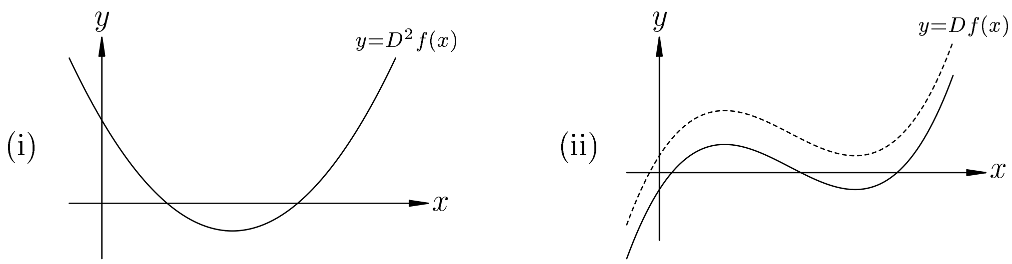
【例三】：$f(x)=x^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$

易见 $Df(x)=4x^3+3Bx^2+2Cx+D$ 和 $D^2f(x)=12x^2+6Bx+2C$，我们依然尝试用二次的 $D^2f(x)$ 来把 $f(x)$ 分类。假设 $D^2f(x)$ 的样子是属于[例一]的 (ii) 或 (iii) 型，即如 [图–7(i)] 所示的虚线或实线图形：



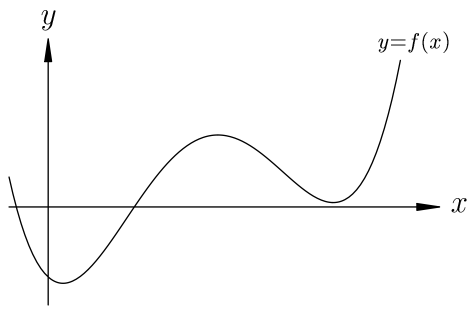
[图–7]

则 $Df(x)$ 的样子就会是如 [图–7(ii)] 所示者，亦即 $f(x)$ 在这两种情况之下都只有两个单调区间。另一方面，假若 $D^2f(x)$ 的样子是[例一]的 (i) 型，即如 [图–8(i)] 所示者：



[图–8]

则 $Df(x)$ 的样子会如 [图–8(ii)] 所示，但有两种不同位置。当 $Df(x)$ 是 [图–8(ii)] 中虚线所示的位置，$f(x)$ 只有两个单调区间；而当 $Df(x)$ 是 [图–8(ii)] 中实线所示的位置，$f(x)$ 就会有四个单调区间，即如下图所示：



[图–9]

<u>函数的 k–阶局部逼近</u>：

在局部分析中，我们还可引入下述关于「微小量的阶」和「逼近的阶」的概念，即

【定义】：一个微小量 Δx 的函数称为「k–阶微小量」若它可写成 Δx^k 的常数倍再加上一些更高阶的微小量。

【定义】：一个函数 $g(x)$ 称为函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的「k–阶局部逼近」若 $|f(x)-g(x)|$ 为足够小的 Δx 的 $(k+1)$–阶微小量，$\Delta x=(x-a)$。

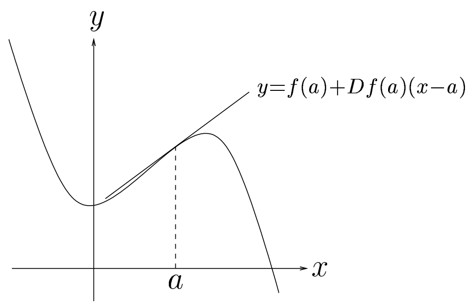
【例子】：

(i) 下述线性（即次数为 1）多项式函数

$$y=f(a)+Df(a)(x-a)$$

为 $y=f(x)$ 于 $x=a$ 的 1–阶局部逼近。

从几何方面来看，线性多项式的图象为一条直线。所以上述的线性局部逼近函数的图象就是在 $y=f(x)$ 的图象中于 $(a,f(a))$ 点的切线。



[图–10]

(ii) 下述函数

$$y = f(a) + Df(a)\Delta x + \ldots + \frac{1}{k!}D^k f(a)\Delta x^k = \sum_{j=0}^{k} D^j f(a)\Delta x$$

为 $y = f(x)$ 于 $x = a$ 的 k–阶局部逼近。