第二章：多元一次方程组的基础理论
与行列式的归纳发现

我们已经和同学们简明扼要地讨论了一元高次多项式的基础理论。现在让我们改弦更张，转为讨论多元代数表达式的基础理论。其中最为简朴者，当然就是多元一次的表达式；而其方程之求解，乃是同学们在小学和初中时期常常碰见的求解线性方程组是也。

求解线性方程组乃是代数学中的基本课题和必用、常用的基本功。在很多的代数解题方法中，例如待定系数法，我们必需通过一些联立方程来解出待定系数的值，而其中比较简单基本者，则往往是可以设法用线性方程组来表达之。同学们在小学和初中的阶段已熟习了运用代入法和消元法求解一些简单的联立方程，所以我们将先从这些简明的方法入手，作为研讨线性方程组的解法和基础理论的起点。

1 代入法和消元法

同学们在小学中所碰见的「鸡兔同笼」问题，其实就是一种二个二元一次方程的求解。例如：笼中有鸡、兔共 36 只，而脚数共有 108 只，问鸡和兔各有多少只？设鸡数为 x，兔数为 y，则有

$$\begin{cases} x+y=36 \\ 2x+4y=108 \end{cases}$$

由第一式解得 $x=36-y$，再代入第二式中，得

$$\begin{aligned} 2(36-y)+4y &= 108 \\ 72+2y &= 108 \\ y &= 18 \end{aligned}$$

再将 $y=18$ 代回第一式中求得 $x=18$。所以鸡、兔各有 18 只。

至于同学们需要对三个三元一次方程求解，一般会在讨论圆的坐标方程时遇到。例如：求过平面上给定三点 $(4,2)$, $(3,5)$, $(2,-2)$ 的圆的坐标方程。通常的解法是：我们设所求的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$（其实这就是一种待定系数法），则由所设可写出下列方程：

$$16+4+4D+2E+F=0 \tag{1}$$

$$9+25+3D+5E+F=0 \tag{2}$$

$$4+4+2D-2E+F=0 \tag{3}$$

现在我们可以用消元法来消去其中一元。例如，用 (2)–式减去 (1)–式及用 (2)–式减去 (3)–式後，我们便得出下述两式：

$$14-D+3E=0 \tag{4}$$

$$26+D+7E=0 \tag{5}$$

这样便消去了其中一元 F，变成二个二元一次方程的情形。再将上述两式相加（目的是消去 D），便得出：

$$40 + 10E = 0$$

由此解得 $E = -4$。代入 (5)–式得 $26 + D - 28 = 0$，即 $D = 2$。最後，把 $E = -4, D = 2$ 代入 (3)–式得 $8+4+8+F = 0$，求得 $F = -20$。因此该圆的坐标方程为 $x^2+y^2+2x-4y-20 = 0$。

若所给定的相异三点并列在某一直线时，则由几何直观知问题应该无解。若所给定三点有其中两点相重时，则易见会有无穷多解；究竟一个线性方程组的解集会出现那些可能性？现在让我们先来系统研讨一下。

2 实给系数的多元一次方程组的求解

其实，当一个多元一次方程组的系数乃是实给者，我们并不需要什麽特别的理论，就可以用代入消元法求解之，其原理简单明了，即：

(i) 选用其一，解得其中系数非零之一个变元，以其他诸元的线性表达式表达之；

(ii) 用它代入其他各式即可得方程个数和元数各减其一的多元一次方程组。

例如，设第一条方程 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1$ 满足 $a_{11} \neq 0$，由此即可解得

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(c_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n)$$

代入第 i–式 $(i \geq 2)$ 之所得就是：

$$(a_{i2} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{12})x_2 + \ldots + (a_{in} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1n})x_n = (c_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}c_1)$$

亦即将第 i–式换成：

$$(\text{第 } i\text{–式}) - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \times (\text{第 } 1\text{–式})$$

如此逐步代入消元，就可能会有下列两种蜕化 (degenerate) 情形发生，即：

其一：某一式变成两侧之系数都为 0；

其二：某一式变成左侧系数全为零，但是右侧常数项则不为 0。

前者出现的实质意义是：该式乃是那些选用来解元代入的方程式的线性组合，所以可以略去不计；而後者出现的实质意义则是：该式和那些选用来解元代入者是互相矛盾的，因此所给方程组是无解者也！所以後者一出现即可断言所给方程组无解，自然就不必再做徒劳无解的虚功。反之，设後者一直不出现，则所给方程组有解。

为了便于下面的叙述，我们不妨先行将方程和变元的编号作一调整，使得 $a_{11} \neq 0$；而且用第 1–式解得 x_1 代入消元之後的第 2–式的 x_2 的系数也不为零，即

$$a'_{22} = (a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}) \neq 0$$

再者，以它解得 x_2 代入消元之後的第 3–式的 x_3 的系数又不为零。以此类推，在第 k 次代入消元後所得之 x_{k+1} 的系数依然不为零。如此逐步代入消元之所得者，乃是下述简单的方程组，它和原给者具有同解：

$$(*)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= c'_2 \\ a''_{33}x_3 + \ldots \quad &= c''_3 \\ \vdots \qquad &\quad \vdots \end{aligned}$$

若最後一个方程是 $a^*_{nn}x_n = c^*_n$，则可以用它解得 $x_n = c^*_n/a^*_{nn}$，然後逐步反代而求解 $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$ 之唯一解。若最後一个方程是：

$$a^*_{m,m}x_m + \ldots + a^*_{m,n}x_n = c^*_m, \quad (m < n)$$

则可以用它解得

$$x_m = \frac{1}{a^*_{m,m}}(c^*_m - a^*_{m,m+1}x_{m+1} - \ldots - a^*_{m,n}x_n)$$

它是将 x_m 表达成 $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ 的线性函数的一个表达式。将它逐步反代，即可解得 $x_{m-1}, \ldots, x_1$ 也表成 $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ 的线性函数的各别表式，亦即

$$\begin{cases} x_1 = \ell_1(x_{m+1}, \ldots, x_n) \\ x_2 = \ell_2(x_{m+1}, \ldots, x_n) \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_m = \ell_m(x_{m+1}, \ldots, x_n) \end{cases}$$

乃是所给方程组之通解，其中 $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ 可以取任何之值，所以是有无穷多个解。

总结上述简短的讨论，即得下述对于多元一次线性方程组的基本认识：

1. 任何实给系数的线性方程组，都可以用代入消元法，逐步消元然後再逐步反代，直截了当地求解。

2. 线性方程组之解有三种情形，即唯一解、无穷多个解和无解，而它们都会在代入消元法中自然地确定之。

3. 代入消元法的具体运算，其实就是有系统地用所给方程组作适当的「线性组合」，把它转换成十分简单易解的 $(*)$–型式。其计算可以用系数的行、列之间的相应计算（亦即分离系数法）加以处理 [这也就是所谓高斯消元法 (gaussian elimination)，其实此法中国在宋元时代即以采用]。

再者，在方程组有唯一解的情况，该唯一解与方程组系数集之间理当有一种特殊的函数关联加以表达之；至于这种特殊的函数表达式究竟是如何，乃是我们将会在下一节详细探讨者也。

3 二阶和三阶行列式

要找出前一节所述的唯一解与系数集之间的函数关联，我们便需要用抽象的方法去讨论，即假设方程组的系数为一些任给者，并探讨在什麼情况下该方程组会有唯一解，由此设法找出加于这些普遍系数身上的限制和特性。由于在方程组的系数中含有待定者，所以往常的代入法便无从入手，因不知何时某系数会蜕化为 0，那样便不能用其他变元来表达该变元了；同理在消元法中我们也要避免用到除法，所以在上一节所提到的「高斯消元法」者也不能在这里直接使用。

开宗明义，让我们首先明确所要研讨的基本问题，即：

<u>线性方程组的基本问题</u>：

> 「在什麼条件之下，一组 n 个 n 元线性方程具有唯一解？再者，在满足唯一解条件的情形，试求以方程组系数表达其唯一解组之公式。」

虽然在 $n=1$ 时的解答是很简单，但它提供了我们一个起点，所以我们先把这时的结果写出如下：

$$ax=b \text{ 当 } a \neq 0 \text{ 时有唯一解，其解之公式为 } x=\frac{b}{a} \tag{6}$$

接著让我们讨论 $n=2$ 的情形。设方程组为

$$a_1x+b_1y=c_1 \tag{7}$$
$$a_2x+b_2y=c_2 \tag{8}$$

若要求出 x 的解，我们首先要设法消去 y。这可以用下述方法做到：
$b_2\times(7)-b_1\times(8)$；即有

$$\begin{aligned}(b_2a_1x+b_2b_1y)-(b_1a_2x+b_1b_2y)&=b_2c_1-b_1c_2\\ \Rightarrow\quad (a_1b_2-a_2b_1)x&=c_1b_2-c_2b_1\end{aligned}$$

所以，如果 $(a_1b_2-a_2b_1)\neq 0$，则 x 的解是唯一的。若 $(a_1b_2-a_2b_1)=0$，则 $a_1:b_1=a_2:b_2$，即 (7) 和 (8) 的左方只相差一个常数倍，所以是属于无解或是有无穷解的情形。至于 y 又怎样呢？我们可用同样方法，先消去 x 然後再看看 y 的系数，即由
$a_2\times(7)-a_1\times(8)$ 可得：

$$\begin{aligned}(a_2a_1x+a_2b_1y)-(a_1a_2x+a_1b_2y)&=a_2c_1-a_1c_2\\ \Rightarrow\quad (a_2b_1-a_1b_2)y&=a_2c_1-a_1c_2\end{aligned}$$

由此可见，同样的条件 $(a_1b_2-a_2b_1)\neq 0$ 也可以保证 y 的解是唯一的，亦即方程组有唯一解的充要条件就是 $(a_1b_2-a_2b_1)\neq 0$。而当这个条件成立时，x 和 y 的解是可以分别用下述公式表达之：

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

这个就是我们想探求者在 $n=2$ 时的情形。我们发现方程组的解的唯一性是取决于某一个量是否不为 0，亦即

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \quad \text{当 } (a_1b_2-a_2b_1)\neq 0 \text{ 时有唯一解。}$$

上述结果和 $n=1$ 的情形 (6) 很类似。此点是否偶然？还是能够有其普遍推广呢？此事当然有待继续探讨，逐步由 $n=3,4,\ldots$ 归纳研究才有定论。为了方便以後的讨论，我们在此先引入二阶行列式的记号：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1 \tag{9}$$

上述代数表达式称之谓该方程组系数的「二阶行列式」(determinant of order 2)，同学们暂且可以把它想成是 $a_1b_2-a_2b_1$ 的另一种写法（我们也定义相应于 $ax=b$ 的「一阶行列式」为 a 本身）。当这个二阶行列式不为 0 时，x, y 就会有唯一解，而且其唯一解之公式就可以用上述符号如下表达之，亦即：

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

接著让我们考虑 $n=3$ 的情形。设方程组为

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \tag{10}$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \tag{11}$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \tag{12}$$

若 $c_2\neq 0$，则可如下先消去 z：
$c_2\times(10)-c_1\times(11)$:

$$(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=d_1c_2-d_2c_1 \tag{13}$$

$c_3\times(11)-c_2\times(12)$:

$$(a_2c_3-a_3c_2)x+(b_2c_3-b_3c_2)y=d_2c_3-d_3c_2 \tag{14}$$

再如下消去 y：
$(b_2c_3-b_3c_2)\times(13)-(b_1c_2-b_2c_1)\times(14)$:

$$\begin{aligned} &\big\{(a_1c_2-a_2c_1)(b_2c_3-b_3c_2)-(a_2c_3-a_3c_2)(b_1c_2-b_2c_1)\big\}x \\ =&\big\{(d_1c_2-d_2c_1)(b_2c_3-b_3c_2)-(d_2c_3-d_3c_2)(b_1c_2-b_2c_1)\big\} \end{aligned} \tag{15}$$

当我们展开上式中 x 的系数时，发现所得的 8 项之中只有 2 项是不含有 c_2 者，而且它们刚好互相抵消。同样情况亦出现在右方的常数项，所以我们可以提出公因子 c_2，并且把 (15) 重写成：

$$\begin{aligned} &c_2(a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1)x \\ =&c_2(d_1b_2c_3-d_1b_3c_2+d_2b_3c_1-d_2b_1c_3+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1) \end{aligned}$$

为何 c_2 会成为公因子呢？原因是当初我们用了两次 (11) 来消去 z，而其中 c_2 是乘了两次的。跟著我们可把不等于 0 的 c_2 约掉，并得出 x 有唯一解的充分条件为

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \neq 0 \tag{16}$$

上述 (16)–式可重写成

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \neq 0 \tag{17}$$

同学们请注意上式那些 $(b_2c_3 - b_3c_2)$ 其实是 y, z 某部分系数的二阶行列式。例如 $(b_2c_3 - b_3c_2)$ 是把 a_1 所在的行（(10)–式）和列（x 的系数）删掉而计算余下系数的行列式。因此，由「後见之明」可以看到了一个更好的做法，即我们只需直接考虑：

$$(b_2c_3 - b_3c_2) \times (10) - (b_1c_3 - b_3c_1) \times (11) + (b_1c_2 - b_2c_1) \times (12)$$

则 y, z 就可以一蹴而成地全被消去，并且可以直接得出

$$\left(a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right)x = d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - d_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{18}$$

（在此不需假设 $c_2 \neq 0$。）

上述有效的消元法让我们坚信 (17) 是比 (16) 更能突出其要点，而用 (17) 来定义「三阶行列式」要比用 (16) 来得顺当自然，即：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{19}$$

用上述三阶行列式符号来重写 (18)，即有：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{20}$$

而相对于 y 和 z 时的情形，我们同样可得（证明留作习题）：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \tag{21}$$

上述 (20)–式和 (21)–式便是著名的 Cramer's rules 在三个三元一次方程的情形。总结上述对于三元的讨论，即有：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad \text{当} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ 时有唯一解。}$$

而且这个唯一解可以用 (20) 和 (21) 表达之。再者，若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$，则 (20)–式和 (21)–式就是

$$0 \cdot x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad 0 \cdot y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad 0 \cdot z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

所以当右侧不为零时方程组 (10)—(12) 显然无解。再者，当右侧也为零时，则方程组 (10)—(12) 这三个之中，其中之一其实是另外二个的推论，所以不是无解就是有无穷多解。总之，在 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ 时，方程组不是无解就是有无穷多解。

4 四阶行列式

在讨论三元线性方程组时所发现的三阶行列式和「有效消元法」是否能够一般地推广呢？让我们再进一步去考虑四元线性方程组和四阶行列式的情形。在一般的中学课程中通常是不讨论四阶行列式的，但是行列式的重要性质要在这个阶段才明显地展现出来，其实应该要再进一步讨论四阶的情形。讨论四阶行列式的繁处在于其定义公式展开後共有 24 项，所以直接使用展开公式来讨论是颇为繁琐的。因此我们将改弦更张，放弃直接使用公式而采用归纳法探究其性质的研讨方法。唯有这样，才能顺理成章地建立起 n–阶行列式的基础理论。

总之，让我们接著考虑四个四元线性方程：

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1w = e_1 \tag{22}$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2w = e_2 \tag{23}$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3w = e_3 \tag{24}$$
$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4w = e_4 \tag{25}$$

我们当然可以直接运用消元法来先消去 w，再消去 z，然後消去 y；这时，x 的系数便是所求的量。但是在 $n = 3$ 的情形我们已发现了一个更为有效的方法可以一蹴而成地消去其他变元，所以不妨依样画葫芦地来试一试其法是否依然可行，即：

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \times (22) - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \times (23) + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \times (24) - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \times (25)$$

如上述方法是可行的，则 x 的系数便是我们所求的「四阶行列式」，亦即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \tag{26}$$

上述依样试用的消元法所得的 y, z 和 w 的系数分别如下，所以此法是否依然可以一蹴而成地消去 y, z 和 w，则当然就取决于它们是否都自然而然地恒为 0！亦即

$$
(27)\qquad \begin{cases}
b_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 0 \\[2ex]
c_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 0 \\[2ex]
d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 0
\end{cases}
$$

现在让我们尝试验证 (27) 的第一式。用三阶行列式的定义，把左方展开成：

$$
\begin{aligned}
& b_1(b_2c_3d_4 - b_2c_4d_3 + b_3c_4d_2 - b_3c_2d_4 + b_4c_2d_3 - b_4c_3d_2) \\
- & b_2(b_1c_3d_4 - b_1c_4d_3 + b_3c_4d_1 - b_3c_1d_4 + b_4c_1d_3 - b_4c_3d_1) \\
+ & b_3(b_1c_2d_4 - b_1c_4d_2 + b_2c_4d_1 - b_2c_1d_4 + b_4c_1d_2 - b_4c_2d_1) \\
- & b_4(b_1c_2d_3 - b_1c_3d_2 + b_2c_3d_1 - b_2c_1d_3 + b_3c_1d_2 - b_3c_2d_1)
\end{aligned}
$$

耐心地展开上式，便会发觉项与项之间真的能逐对正负相消而恒等于 0。虽然我们可以同样地验证 (27) 的其余两式，但预见过程也是同样麻烦，再者到了讨论五、六阶行列式时这种做法是愈来愈繁而不胜其繁者也。因此我们需要寻求的出路是对行列式的性质作深一层了解；亦即不再停留于其展开公式，而是对它的本质作深入探讨。

像 (27) 这类公式能够普遍地成立，我们相信此事决非纯属偶然，肯定应有其本质性的原因！因此我们应当去把其中隐藏的原因发掘出来。首先我们看到 (27) 的左方其实是比较特别的四阶行列式，用定义式 (26) 我们可以将它们分别改写成下述模样：

$$
\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ c_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ d_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}
$$

可见它们全是有两列 (columns) 完全一样的四阶行列式。所以，若我们能够证明任何有两列全同的四阶行列式的值恒为 0（这种特性称之为「交错性」(alternating property)），则 (27) 就会普遍成立。可惜这个方法涉及寻找四阶行列式的确实数值，所以仍受著繁复公式的牵制；我们不妨避重就轻，改为研讨下述的「特性」：

「把一个行列式中的两列互换时，它的新旧值是否只相差一个负号？」

若上述特性（称之为「斜对称性」(skew-symmetric property)）能够普遍成立，则只需把两个全同之列互换，例如

$$
\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}
$$

即得这个四阶行列式的值必为 0。同理，其余两值也为 0，于是 (27)–式普遍成立，亦即「有效消元法」是可行的。现在让我们著手验证上述斜对称性。

[注]：交错性与斜对称性在一般抽象环、域的行列式理论中是有少许差别的，但在这里我们可以把它们当作同一样的概念。

对于二阶行列式，由其定义式 (9) 即知：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = -(b_1a_2 - b_2a_1) = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

所以斜对称性在 $n = 2$ 时成立。

对于三阶行列式，有 3 种互换方法要考虑，如互换第一列和第二列：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \\ &= -(b_1a_2c_3 - b_1a_3c_2 + b_2a_3c_1 - b_2a_1c_3 + b_3a_1c_2 - b_3a_2c_1) = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

同理可证余下的两种互换方法，即互换第一列和第三列，及互换第二列和第三列。斜对称性在 $n = 3$ 时亦成立。

对于四阶行列式，上述的直接验证方法便很费时了。在此，我们将改用性质来证明。首先回顾四阶行列式的定义式：

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1D_{1,1} - a_2D_{2,1} + a_3D_{3,1} - a_4D_{4,1} \tag{26'}$$

在这里我们引入了简约符号 $D_{i,j}$，它代表把原来的四阶行列式内的第 i 行 (i-th row) 和第 j 列 (j-th column) 删去後，所得的三阶行列式。例如 $D_{2,1}$ 就是：

$$D_{2,1} = \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & b_1 & c_1 & d_1 \\ \cancel{a_2} & \cancel{b_2} & \cancel{c_2} & \cancel{d_2} \\ \cancel{a_3} & b_3 & c_3 & d_3 \\ \cancel{a_4} & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

由上述重写的定义式 (26′) 可以看到，若在原来的四阶行列式中所互换的两列并不涉及第一列，则以上每一个 $D_{i,1}$ 也有相应的换列发生；由已知的 $n = 3$ 的情形得知每个 $D_{i,1}$ 也转作 $-D_{i,1}$，因此原来的四阶行列式 D 也转为 $-D$。余下只需验证涉及第一列的换列。

稍加分析後，我们只需集中讨论第一列和第二列的互换。例如，第一列和第三列的互换可用下述三步得出：

0.	起始：	A—B—C—D
1.	互换第二列和第三列：	A—C—B—D
2.	互换第一列和第二列：	C—A—B—D
3.	互换第二列和第三列：	C—B—A—D

由于第 1 步和第 3 步都引入一个负号，所以其作用互相抵消；若可验证第 2 步也同样地引入一个负号，则涉及第一列的换列之验证便可完成。

在行列式的定义式 (26′) 中，第一列是有别于其余各列的，因为用来写下定义式的系数是取于第一列者，而其他列的系数则全都统括在那些低一阶的子行列式内。所以，当第一列和第二列互换後，骤看起来定义式便会变得面目全非、难以处理。因此，我们先要做一些准备功夫，把那些三阶行列式再进一步分解下去，将原来四阶行列式的第二列系数也提出来，这样第二列和第一列系数便可以处于同等地位。例如：

$$\begin{aligned} D_{1,1} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} &= b_2 \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} \\ &= b_2 D_{12,12} - b_3 D_{13,12} + b_4 D_{14,12} \end{aligned}$$

其中 $D_{14,12}$ 代表把原来的四阶行列式内的第 1 行和第 4 行、以及第一列和第二列删去後，所得的二阶子行列式。其他如 $D_{12,12}$ 和 $D_{13,12}$ 也类似地定义之。当我们把在 (26′) 中的四个三阶子行列式全都如前述分解後，便得出：

$$\begin{aligned} & \text{原来的四阶行列式}, D \\ = {} & a_1\big(b_2D_{12,12} - b_3D_{13,12} + b_4D_{14,12}\big) - a_2\big(b_1D_{12,12} - b_3D_{23,12} + b_4D_{24,12}\big) \\ & + a_3\big(b_1D_{13,12} - b_2D_{23,12} + b_4D_{34,12}\big) - a_4\big(b_1D_{14,12} - b_2D_{24,12} + b_3D_{34,12}\big) \\ = {} & (a_1b_2 - a_2b_1)D_{12,12} + (a_3b_1 - a_1b_3)D_{13,12} + (a_1b_4 - a_4b_1)D_{14,12} \\ & + (a_2b_3 - a_3b_2)D_{23,12} + (a_4b_2 - a_2b_4)D_{24,12} + (a_3b_4 - a_4b_3)D_{34,12} \end{aligned}$$

由上式我们立即可看到若把 D 的第一列和第二列互换（即把 a_i 和 b_i 互换），则每个 $D_{ij,12}$ 保持不变，但其系数却都引进了负号，所以整体上 D 便转为 $-D$。斜对称性得证，所以「有效消元法」在 $n = 4$ 时依然可行。

跟著我们再用「有效消元法」来从 (22)—(25) 一次地消去 x, z, w:

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \times (22) - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \times (23) + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \times (24) - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \times (25)$$

此时，x 的系数就是：

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

但由四阶行列式定义，上述表达式其实是：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

由斜对称性知其值必为 0，所以 x 的确被消去。同理可证 z, w 也被消去，而余下 y 的系数则是：

$$b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_4 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

所以这个四阶行列式的值不为 0 也是 y 有唯一解的充分条件。类似地可得出 z 或 w 有唯一解的同一充分条件。由此即得下述结论：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1w = e_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2w = e_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3w = e_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4w = e_4 \end{cases} \quad \text{当} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ 时有唯一解。}$$

而证明中的要点就是四阶行列式满足斜对称性：「若互换两列，则其值变号」。

再者，易见在上述四阶行列式非零的情形，(22)—(25) 的唯一解的公式如下：

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} e_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ e_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & e_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & e_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & e_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & e_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad \text{等等} \tag{28}$$

在 $D = 0$ 的情形，方程组不是无解就是有无穷多解的讨论则类似于 $n = 3$ 的情形，在此留作习题。

5 n–阶行列式的归纳定义

本质上，n–阶行列式乃是一个非常特出的多项式函数。它含有 n^2 个变元，其展开公式共计有 $n!$ 项，每项的次数是 n，亦即它是一个齐 n 次 n^2–元多项式函数。一般的这种多项式函数个数多过恒河沙数，绝大部分都是无用者，唯独行列式这个齐 n 次 n^2–元多项式在整个数学的基础理论中扮演重要的角色。究其原因，乃是它所具有的种种簡洁美好的性质。在所有 n^2–元的多项式之中，行列式可以说是丽质天成，独一无二的精要所在。总之，行列式之所以重要、有用乃是它所独具的优良性质，使得在不同的数学范畴的研讨中（包括代数、分析、几何），它都是一个不可或缺、精簡好用的的重要工具。

n–阶行列式的归纳定义：总结前面的三阶和四阶行列式的讨论，我们得见下述两点：

(i) 行列式可以用第一列的 n 个系数（即 $a_{i1}, 1 \le i \le n$），以交错的形式分别乘上其相应的低一阶的子行列式（即 $D_{i,1}, 1 \le i \le n$）後，以其总和来加以归纳地定义；（这正是「有效消元法」的具体化）

(ii) 行列式具有斜对称性，即互换两列时，其值变号。

现在让我们来正式地定义 n–阶行列式。考虑下述 n 个 n 元一次的线性方程组（$n \geq 3$）：

$$
\tag{29}
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

由它的系数集所得的 n–阶行列式 D 则定义为

$$
\tag{30}
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}D_{1,1} - a_{21}D_{2,1} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}D_{n,1} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}D_{i,1}
$$

其中每一个 $D_{i,1}$, $1 \leq i \leq n$, 都是低一阶的子行列式，它们分别是把原来 n–阶行列式内的第 i 行和第 1 列删去，所得的 $(n-1)$–阶子行列式。例如，$D_{2,1}$ 就是如下把 D 的第 2 行和第 1 列删去，在式子最右方所示的 $(n-1)$–阶行列式，即：

$$
D_{2,1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

注意上述是「归纳地」定义 n–阶行列式，亦即借助业已定义的 $(n-1)$–阶行列式来定义 n–阶行列式。其实一个完整的归纳法应该可以分为下述三个步骤：

一、 归纳地发现具有某种有用特性的事物 (inductive discovery)；

二、 归纳地定义该事物 (inductive definition)；

三、 归纳地证明上述归纳定义者的确具有所应有之特性 (inductive proof)。

而其中的「归纳发现」则是最有意思也是最为重要的起步。若我们再看一看前面对于四阶行列式的讨论，就会发现行列式所需要的「归纳定义」，以及其所需的「归纳证明」其实已经在「归纳发现」的过程中呼之欲出地展现著。

现在让我们来归纳地证明 (30) 所定义的 n–阶行列式就是我们所需求者，要点在于验证其斜对称性。归纳假设所有不高于 $(n-1)$–阶的行列式 $(n \geq 3)$ 业已具有斜对称性，我们把 n–阶行列式 D 的换列分成下述两种情形来考虑：

一、不涉及第一列的换列。

从定义式 (30) 可以直接看到，其中每一个 $D_{i,1}$ 也都有相应的换列，由归纳假设知道这种换列使得每一个 $D_{i,1}$ 变为 $-D_{i,1}$，而 a_{i1} 则全部不变，易见这种换列使得 D 变为 $-D$。

二、第一列和第 k 列的互换。

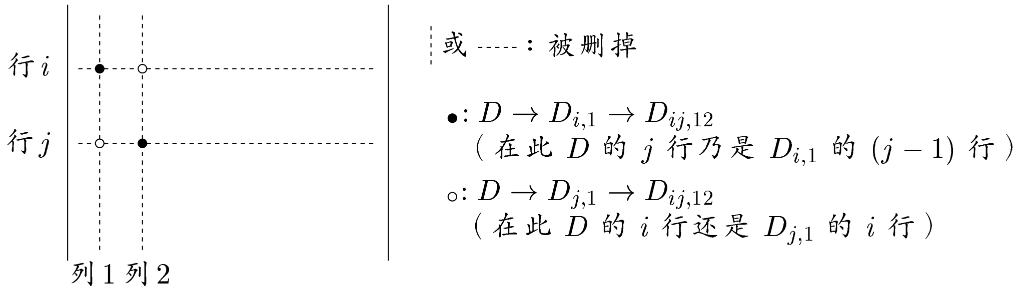
这个情况和在讨论四阶行列式的斜对称性证明时一样，我们只需集中讨论第一列和第二列的互换。而验证的方法则是把那些 $D_{i,1}$ 分别再用 $(n-1)$–阶行列式的归纳定义式展开成

一些 $(n-2)$–阶子行列式（即 $D_{ij,12}$）的倍数和，然後研讨最後所得的展开式中每一个 $D_{ij,12}$ 的系数在上述换列後的变化。$D_{ij,12}$ 的定义是把 D 的第 i 行和第 j 行、以及第 1 列和第 2 列删去，所得的 $(n-2)$–阶子行列式。易见可以有下述两种途径得出含有 $D_{ij,12}$ 者：

(i) 从 $D_{i,1}$ 中删掉相对于 D 的第 j 行和第 2 列；

(ii) 从 $D_{j,1}$ 中删掉相对于 D 的第 i 行和第 2 列。

可参考下述图示：



[图–1]

我们不妨假设 $i<j$。在方法 (i) 中得出的 $D_{ij,12}$，其系数（在 D 的展开）为 $(-1)^{i+1}a_{i1}\cdot(-1)^{j}a_{j2}$；而在方法 (ii) 中得出的 $D_{ij,12}$，其系数为 $(-1)^{j+1}a_{j1}\cdot(-1)^{i+1}a_{i2}$。于是在 D 的展开中，$D_{ij,12}$ 是以下述形式出现：

$$D=\ldots+(-1)^{i+j+1}\big(a_{i1}a_{j2}-a_{j1}a_{i2}\big)D_{ij,12}+\ldots \tag{31}$$

由此可见，当 D 的第一列和第二列互换後（即 $a_{i1}\leftrightarrow a_{i2}, a_{j1}\leftrightarrow a_{j2}$），其展开中 $D_{ij,12}$ 的系数的改变为：

$$a_{i1}a_{j2}-a_{j1}a_{i2}\to a_{i2}a_{j1}-a_{j2}a_{i1}=-\big(a_{i1}a_{j2}-a_{j1}a_{i2}\big) \tag{32}$$

总括来说，当 D 的第一列和第二列互换後，在它的上述表成 $(n-2)$–阶子行列式 $D_{ij,12}$ 的展开中，每个 $D_{ij,12}$ 保持不变，但其系数则变号，所以整体上对 D 的影响乃是 $D\to -D$。斜对称性得证。 $\square$

【历史的注记】：虽然直接给出 n–阶行列式的展开式来作定义也是可行的，但是这样便需要对排列群 (permutation group)（或称作对称群，symmetric group）有一定的认识才可以妥善地做好。想当年 Cramer 和 Vandermonde 乃是非常优秀的代数学家，而且他们对于排列群又有著深刻的认识，所以他们才直截了当地处理那个巨大的展开公式；但对于初学者或是对排列群认识不深的人来说，这样讨论行列式是难以胜任自如的。

为了便于讨论 n–阶行列式的其他性质，在此引入列向量记号。令

$$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix},\ \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix},\ \ldots,\ \mathbf{a}_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

而列向量的加和倍积运算是直接用其分量加以定义的，即

$$\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix} a_{11}+a_{12} \\ a_{21}+a_{22} \\ \vdots \\ a_{n1}+a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \lambda\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} \\ \lambda a_{21} \\ \vdots \\ \lambda a_{n1} \end{bmatrix}$$

在这种符号体系下，我们把 D 重新写成：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\det(\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)$$

于是，当我们用下述「有效消元法」尝试从 (29) 中消去 $x_2,\ldots,x_n$ 时：

$$D_{1,1}\times(29.1)-D_{2,1}\times(29.2)+\ldots+(-1)^{n+1}D_{n,1}\times(29.n) \tag{33}$$

则得出 (33) 的左方为：

$$\begin{aligned}
&\big(a_{11}D_{1,1}-a_{21}D_{2,1}+\ldots+(-1)^{n+1}a_{n1}D_{n,1}\big)x_1+\big(a_{12}D_{1,1}-a_{22}D_{2,1}+\ldots+(-1)^{n+1}a_{n2}D_{n,1}\big)x_2 \\
&\quad+\ldots+\big(a_{1n}D_{1,1}-a_{2n}D_{2,1}+\ldots+(-1)^{n+1}a_{nn}D_{n,1}\big)x_n \\
&=\det(\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)x_1+\det(\mathbf{a}_2,\,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)x_2+\ldots+\det(\mathbf{a}_n,\,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)x_n \\
&=\det(\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)x_1+0x_2+\cdots+0x_n \qquad \text{（用 det 的斜对称性）} \\
&=\det(\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)x_1
\end{aligned}$$

而 (33) 的右方则为：

$$b_1D_{1,1}-b_2D_{2,1}+\ldots+(-1)^{n+1}b_nD_{n,1}=\det(\mathbf{b},\,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)$$

所以，我们得出在一般情况下相对于 x_1 的 Cramer's rule：

$$\det(\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)x_1=\det(\mathbf{b},\,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n) \tag{34}$$

而其他的 Cramer's rules 亦可以类似地导出。至此，我们可以作下述结论：

$$\begin{cases} a_{11}x_1\,+\,\ldots\,+\,a_{1n}x_n\,=\,b_1 \\ a_{21}x_1\,+\,\ldots\,+\,a_{2n}x_n\,=\,b_2 \\ \qquad\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1\,+\,\ldots\,+\,a_{nn}x_n\,=\,b_n \end{cases} \quad \text{当 } D\neq 0 \text{ 时有唯一解。} \tag{35}$$

而当 $D=\det(\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)\neq 0$ 时，其唯一解是可以用下述 Cramer's rules 表示之，即

$$x_i=\frac{1}{D}\det(\ldots,\underset{i}{\mathbf{b}},\ldots), \quad 1\leq i\leq n \tag{36}$$

其中 $(\ldots,\underset{i}{\mathbf{b}},\ldots)$ 表示把 $(\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)$ 的第 i 列换成 $\mathbf{b}$。

在此我们还得到一个常用、好用的推论，即

【推论】： n 个 n 元齐线性方程组

$$(37)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

具有非零解的条件是

$$(38)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

至于当 $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = 0$ 时 (29) 不是无解就是有无穷多解的证明和以往完全一样，在此留作习题。我们在开始时所研讨的线性方程组的基本问题，至此业已完全解决。

6 斜对称多线性函数与行列式的界定定理

一般来说，当我们对于某一问题或某一事物由表及里作深入探讨时，要点在于精益求精地掌握其本质和精要所在，所以在进一步研讨行列式时，我们的中心课题就是要对于行列式的各种各样性质作系统的整理。行列式的两个基本性质在于其斜对称性和多线性。

由行列式的定义式 (30) 易见它对于第一列是线性 (linear) 的，即：

$$\det(\lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = \lambda\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) + \mu\det(\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

运用其斜对称性，就可以把线性条件推广至其他各列，例如第二列：

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{a}_1, \lambda\mathbf{a}_2 + \mu\mathbf{a}_2^*, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n) &= -\det(\lambda\mathbf{a}_2 + \mu\mathbf{a}_2^*, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n) \\ &= -\lambda\det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) - \mu\det(\mathbf{a}_2^*, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \\ &= \lambda\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n) + \mu\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2^*, \ldots, \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

上述对于每列都是线性的特性称之为「多线性」(multilinear)，所以行列式就是其 n 个列向量的斜对称多线性函数。我们再引入下述符号：

【定义】：令下述 n 个 n–维列向量为标准基底列向量：

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \ldots,\ \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow j\text{处} \\ \\ \\ \end{matrix},\ \ldots,\ \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

[注]：在不同大小的 n 之下，我们仍沿用 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 等同一符号，只要不会产生混乱便可。

现在我们证明下述定理，它说明了斜对称性和多线性两者基本上已经界定了行列式的基本性质：

【行列式界定定理】：设 $f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ 为一个含有 n 个 n–维向量变元的函数，并满足斜对称性及多线性，则

$$f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

证明：令

$$F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) - f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

易见 $F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ 也满足斜对称性及多线性，而且 $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 0$。我们要用上述三点推论 $F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \equiv 0$，其证明如下：

我们可以用标准基底列向量，把每个 $\mathbf{a}_j$ 写成它们的线性组合，即：

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}_n = \textstyle\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}\mathbf{e}_{i_1} \\
\mathbf{a}_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n2}\mathbf{e}_n = \textstyle\sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2}\mathbf{e}_{i_2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathbf{a}_j &= a_{1j}\mathbf{e}_1 + a_{2j}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nj}\mathbf{e}_n = \textstyle\sum_{i_j=1}^{n} a_{i_j j}\mathbf{e}_{i_j} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathbf{a}_n &= a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n = \textstyle\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\mathbf{e}_{i_n}
\end{aligned}$$

运用 F 的多线性，逐步把 F 如下的展开：

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) &= F\Big(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}\mathbf{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2}\mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\mathbf{e}_{i_n}\Big) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} F\Big(\mathbf{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2}\mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\mathbf{e}_{i_n}\Big) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2} F\Big(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\mathbf{e}_{i_n}\Big) \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n})
\end{aligned}$$

在上述具有 n^n 项的巨大展开式之中其实每一项都是 0，所以其总和还是 0。其理由如下：一方面当足标 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ 之中有任何两个相同时，则由 F 的斜对称性可知其值必为 0。另一方面在 n 个足标都相异时，再由其斜对称性可得 $F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n}) = \pm F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 0$。 □

行列式的定义公式是取第一列的系数来展开，这是因为我们前述的有效消元法目的是消去第二至第 n 变元；若要保留第二变元而消去其他变元，我们用的消元法就应该是以第二

列系数来展开行列式（参考第 10 页）。一般来说，我们可借助斜对称性，先把第一列和第 j 列交换後再展开，由此导出从第 j 列展开行列式的公式。例如 $j=2$：

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= -a_{21}D_{2,1} + a_{22}D_{2,2} - \cdots + (-1)^{n+2}a_{n2}D_{n,2}
\end{aligned}
$$

及一般 j：

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= -\begin{array}{c} \text{列 } j \downarrow \\ \begin{vmatrix} a_{1j} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & \cdots & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \\
= -a_{1j} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{31} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \uparrow \text{列 } j-1 \end{array} &+ a_{2j} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & \cdots & a_{31} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \uparrow \text{列 } j-1 \end{array} - \ldots + \\
&+(-1)^{n+2}a_{nj} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \\ \uparrow \text{列 } j-1 \end{array} \\
&= (-1)^{1+j}a_{1j}D_{1,j} + (-1)^{2+j}a_{2j}D_{2,j} + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}D_{n,j}
\end{aligned}
$$

由于 D 的第一列系数是在那些 $(n-1)$–阶子行列式的第 $(j-1)$ 列中，所以可利用 $(j-2)$ 次换列把它们全都移回各自子行列式的第一列，因而得出上述的等式。总括来说，把行列式对第 j 列展开有下述公式：

$$D = (-1)^{1+j}a_{1j}D_{1,j} + (-1)^{2+j}a_{2j}D_{2,j} + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}D_{n,j}$$

<u>行列式的行列对称性</u>：

在基础数学中，行列式有两个自然的源起。其一就是我们在前面所研讨的 n–阶线性方程组的基础理论，其二则是我们即将在後面研讨的 n–维平行体（2–维的平行四边形和 3–维的平行六面体的自然推广）的<u>高维有向体积</u> (high dimensional oriented volume)。而上述两者的结合又是多变数微积分基础理论之所基。由此可见，行列式不但具有简洁好用的基本性质，而且也自然地是代数、几何、分析这数学三大支柱的基石所在。由此可见行列式广泛而且基本的用场的梗概。

从上面行列式的两个自然出处，易见它的 n^2 个变元是自然而然地具有行、列的编排的（这也就是行列式这个名称的来由）。因此，在行列式基本性质的研讨中，自然应该把每

一列（或每一行）的 n 个变元看成一个整体。我们将用 $\mathbf{x}_j, 1 \leq j \leq n$, 表示 j–列向量；$\overline{\mathbf{x}}_i$, $1 \leq i \leq n$, 表示 i–行向量，亦即

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{x}}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$$

在前面的讨论中，我们把行列式看成其 n 个列向量的函数，即 $\det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$。由行列式的界定定理可见，下述三点业已构成行列式的一组特徵性质：

(i) 斜对称性：$\det(\ldots \mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_j \ldots) = -\det(\ldots \mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_i \ldots)$

(ii) 多线性：$\det(\lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$

$$= \lambda \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) + \mu \det(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$$

以及对于其他各列同此。

(iii) $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$

我们当然也可以把行列式看做它的 n 个行向量 $\{\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_n\}$ 的多项式函数，且以符号 $f(\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_n)$ 记号之。我们很自然要问它是否也同样地具有上述三点基本性质？假如具有，则 $f(\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_n) = \det(\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_n)$。换言之，亦即行列式是否具有在 $x_{ij} \leftrightarrow x_{ji}$ 互换之下保持不变的行、列对称性？不难看到，在 $n = 1, 2, 3$ 的情形是具有这种行、列互换，保持不变的对称性的。由此，我们当然又会想到用归纳法去研讨它是否普遍成立？由前面的经验可见，我们只要能够验证行列式也可以对于其第一行有下述展开公式，即

$$D \stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} x_{1j} D_{1,j} \tag{39}$$

假若上式得证，则可用完全同样的论证，归纳地证明 $f(\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_n)$ 的斜对称性和多线性，而 $f(\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n) = 1$ 是显然的。兹验证 (39)–式如下：

<u>(39)–式之证明</u>：设 $|a_{ij}| \neq 0$，由行列式的斜对称性和其归纳定义式 (30) 可见

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) = (-1)^{j+1} D_{1,j}$$

再者，由方程组 (29) 在 $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1$ 时唯一解的公式，即有

$$x_j = \frac{1}{D} \det(\ldots, \mathbf{e}_1, \ldots) = \frac{1}{D} (-1)^{j+1} D_{1,j}$$

将它代入 (29) 的第一式，即有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = \frac{1}{D} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} D_{1,j} = 1$$

亦即

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} D_{1,j} = D$$

对于任给 $|a_{ij}| \neq 0$ 的取值恒成立。因此 (39) 乃是 n^2–变元的恒等式。在这里，我们用到一个多项式代数中简单有用的事实，即一个 m 元多项式 $P(x_1, \ldots, x_m)$，若它在每个变元皆可相互无关地选用无穷多个取值使得 $P(x_1, \ldots, x_m) = 0$，则 P 恒等于 0。此事乃是一个非零单元多项式至多只有有限个根的直接推论。 □

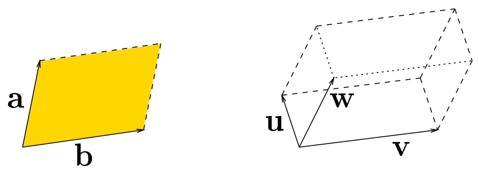
【推论】：行列式对于行向量也有同样的斜对称性和多线性。再者，它也有下述对于第 i 行的展开式

$$D = |x_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{i,j}$$

7 行列式的几个应用

7.1 平行体体积与行列式

在平面上，两个不共线的向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 可以张成 (span) 一个平行四边形；而在空间中，三个不共面的向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 可以张成一个平行六面体，如下图所示：



[图–2]

由简单的几何分析容易求得上述平行四边形的面积和平行六面体的体积，即

$$\text{面积} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\sin \angle \mathbf{a}, \mathbf{b})|, \quad \text{体积} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|$$

在定义 $\times$–积或写出平行体体积公式时，还会引入行列式记号：

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

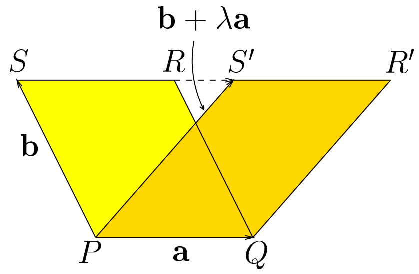
能用以上记号去表达体积是纯属碰巧，或是由于有某些本质上的原因呢？若我们只停留在讨论表面公式，是难以体认其本质的。现在，我们对行列式已有著一些本质上的认识，所以跟著也要对平行四边形面积、平行六面体体积找寻一些本质上的认识。

在平面上一个由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所张成的平行四边形，我们以 $\widetilde{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 表示其通常（恒取正值）的面积。不难看出 $\widetilde{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是具有以下的基本性质：

$(\widetilde{\text{i}})$ 对称性：$\widetilde{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \widetilde{A}(\mathbf{b}, \mathbf{a})$

$(\widetilde{\text{ii}})$ 拟比性：$\widetilde{A}(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\lambda|\widetilde{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \widetilde{A}(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b})$

$(\widetilde{\text{iii}})$ 斜移不变性：$\widetilde{A}(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \mathbf{b}) = \widetilde{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \widetilde{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mu\mathbf{a})$



[图–3]

[$\square PQRS$ 和 $\square PQR'S'$ 之间的变化只是将 $\overline{SR}$ 作平行滑动。从几何观点来看，两者为同底同高的平行四边形，所以面积应该相等。]

若在平面上先选定一个正角之转向，亦即其上的一个定向 (orientation)，而且定义 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所张成的平行四边形的有向面积 (oriented area) 为

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \angle \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

上述面积在由 $\mathbf{a}$ 到 $\mathbf{b}$ 的转向为正时取正值，为负时取负值。易见有向面积 $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 满足下列基本性质，即

(i) 斜对称性：$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -A(\mathbf{b}, \mathbf{a})$

(ii) 比性：$A(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b})$

(iii) 斜移不变性：$A(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}, \mathbf{b}) = A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A(\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mu\mathbf{a})$

把上述两种面积函数相比较，骤看起来，$\widetilde{\text{(i)}}$ 略优于 (i) 而 (ii) 则略优于 $\widetilde{\text{(ii)}}$，似乎是半斤八两。但细加分析，则 $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 远比 $\widetilde{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 优越！此事可以由下述结果充分说明其优越性：

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c}) = A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + A(\mathbf{a}, \mathbf{c})$$

<u>证明</u>：令 $\mathbf{e}$ 为在平面中使得 $\angle \mathbf{a}, \mathbf{e}) = \pi/2$ 的单位长向量，则可把 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 分解成垂直于 $\mathbf{a}$ 和平行于 $\mathbf{a}$ 的分向量之和如下：

$$\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{e} + \mu_1\mathbf{a}, \quad \mathbf{c} = \lambda_2\mathbf{e} + \mu_2\mathbf{a}$$
$$\mathbf{b}+\mathbf{c} = (\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{e} + (\mu_1+\mu_2)\mathbf{a}$$

由此再连续使用性质 (ii), (iii) 即有

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c}) &= A(\mathbf{a}, (\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{e}) && [\text{用 (iii)}]\\
&= (\lambda_1+\lambda_2)A(\mathbf{a}, \mathbf{e}) && [\text{用 (ii)}]\\
&= \lambda_1 A(\mathbf{a}, \mathbf{e}) + \lambda_2 A(\mathbf{a}, \mathbf{e}) &&\\
&= A(\mathbf{a}, \lambda_1\mathbf{e}) + A(\mathbf{a}, \lambda_2\mathbf{e}) && [\text{用 (ii)}]\\
&= A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + A(\mathbf{a}, \mathbf{c}) && [\text{用 (iii)}]
\end{aligned}$$

因此，$A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是以向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为变元的函数，并满足斜对称性和多线性。所以由行列式界定定理得：

(40) $$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

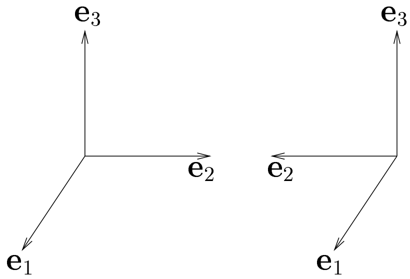
对所有列向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 恒成立，其中 $A(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=1$，亦即

$$A(\mathbf{a},\mathbf{b})=\det(\mathbf{a},\mathbf{b}) \tag{40'}$$

现在我们已看出平行四边形的面积和行列式的确有著本质上的直接关联。至于在平行六面体体积时的情况，亦能类似地把这个本质上的关联找出来。首先我们要讨论空间的定向问题。

空间的定向和平行六面体的定向体积：

一条直线只有两个方向，其定向就是选定其一为正向；一个平面上的转角方向也只有两个，其定向就是选取其一为正的转角方向。现在让我们来分析一下空间的「定向」应该如何定义。空间中的所有正交标架可以分成两类，即如下图所示的右手型和左手型，两个同型者可以用适当的平移和转轴的组合相互变换，而不同型者则无法如此相互变换。



[图–4]

再者，一个反射对称则把两种类型的正交标架互换。通常的做法是：空间的定向乃是在上述两种类型中选定其一为正向者，而一个由 $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ 所张的平行六面体的定向体积之正负则由标架 $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ 是正向型或负向型而定。在这样的空间的定向概念下，定向平行六面体的有向体积是一个满足下列基本性质的函数 $V(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$：

(i) 斜对称性：$V(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=V(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u})=V(\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v})=-V(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})=-V(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w})=-V(\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{u})$

(ii) 比性：$V(\lambda\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=\lambda V(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ 等

(iii) 斜移不变性：$V(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{w})=V(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ 等

再者，我们也可以同样地由 (ii) 和 (iii) 推导出下述结果：

$$V(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2,\mathbf{v},\mathbf{w})=V(\mathbf{u}_1,\mathbf{v},\mathbf{w})+V(\mathbf{u}_2,\mathbf{v},\mathbf{w})$$

证明：若 $\mathbf{v},\mathbf{w}$ 所张成的平行四边形不是 2–维的，则上述三个体积都是 0，所以上述等式当然成立。

若 $\mathbf{v},\mathbf{w}$ 所张成的是一个非蜕化的平行四边形，在其所在平面的两个单位长法向量中选定其一为 $\mathbf{e}$，把 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ 分别分解成 $\mathbf{e},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 的倍积之和，即有：

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= u_1\mathbf{e}+\lambda_1\mathbf{v}+\mu_1\mathbf{w}\\
\mathbf{u}_2 &= u_2\mathbf{e}+\lambda_2\mathbf{v}+\mu_2\mathbf{w}\\
\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2 &= (u_1+u_2)\mathbf{e}+(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{v}+(\mu_1+\mu_2)\mathbf{w}
\end{aligned}$$

由此再连续使用性质 (ii), (iii) 即有

$$\begin{aligned} V(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2,\mathbf{v},\mathbf{w}) &= V\big((u_1+u_2)\mathbf{e},\mathbf{v},\mathbf{w}\big) && [\text{用 (iii)}]\\ &= (u_1+u_2)V(\mathbf{e},\mathbf{v},\mathbf{w}) && [\text{用 (ii)}]\\ &= u_1V(\mathbf{e},\mathbf{v},\mathbf{w})+u_2V(\mathbf{e},\mathbf{v},\mathbf{w}) &&\\ &= V(u_1\mathbf{e},\mathbf{v},\mathbf{w})+V(u_2\mathbf{e},\mathbf{v},\mathbf{w}) && [\text{用 (ii)}]\\ &= V(\mathbf{u}_1,\mathbf{v},\mathbf{w})+V(\mathbf{u}_2,\mathbf{v},\mathbf{w}) && [\text{用 (iii)}] \end{aligned}$$

因此，$V(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ 亦是以向量 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 为变元的斜对称多线性函数，所以由行列式界定定理有

$$V(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = V(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) \tag{41}$$

对所有 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 恒成立，其中 $V(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=1$，亦即

$$V(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) \tag{41$'$}$$

所以，在一个 n–维的空间内，由 n 个向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 所张成的平行多面体的 n–维有向体积便自然而然地定义为

$$V(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)$$

7.2 几何图形的坐标方程

设直线 $Ax+By+C=0$ 通过给定（相异）两点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，则有

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+C=0\\ Ax_2+By_2+C=0 \end{cases}$$

若 (x,y) 是在线上的另给一点，则还有 $Ax+By+C=0$，即

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+C=0\\ Ax_2+By_2+C=0\\ Ax+By+C=0 \end{cases}$$

至此，若把上述方程组想成以 A, B, C 为变元的线性方程组：

$$\begin{cases} x_1\cdot A+y_1\cdot B+1\cdot C=0\\ x_2\cdot A+y_2\cdot B+1\cdot C=0\\ x\cdot A+y\cdot B+1\cdot C=0 \end{cases}$$

则上述线性方程组理应有非全零解 $\{A,B,C\}$，所以由行列式的理论即得其条件式为：

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{42}$$

这便是过 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 两点的直线方程。

同理，在空间中过三点 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) 的平面坐标方程就是

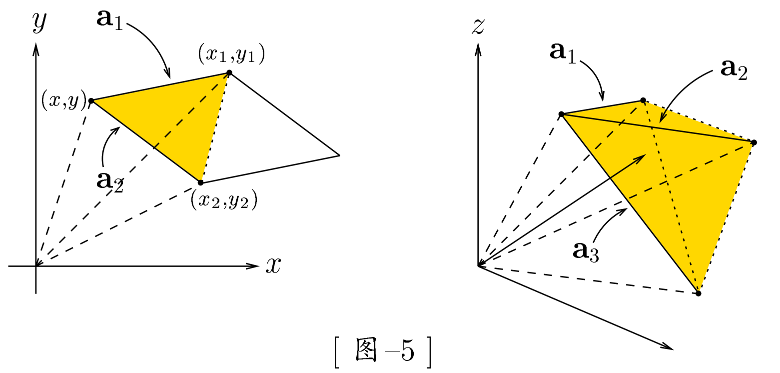
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

从另一个角度来看，上述直线、平面方程亦可想成是三点共线、四点共面的条件；而把满足共线条件的 (x, y) 或共面条件 (x, y, z) 随意走动，则可得出代表该直线或该平面的方程。

[注]：上述所得的行列式其实和该三点所定的三角形面积（或该四点所定的四面体体积）有关。例如，把 (42)–式里的行列式的第一行和第二行分别减去第三行，再从第三列展开可得

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & 0 \\ x_2 - x & y_2 - y & 0 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix}$$

而上述的二阶行列式就是向量 $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \end{bmatrix}$ 所张成的平行四边形面积，如下图（左）所示：



[图–5]

因此

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{以 } (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \text{ 为顶点} \\ \text{的三角形的有向面积的二倍。} \end{array}$$

所以三点共线的条件就是此三角形面积为 0。同理亦可求得

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{以 } (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \\ \text{为顶点的四面体的有向体积的六倍。} \end{array}$$

亦即四点共面的条件就是此四面体的体积为 0。

7.3 行列式与插值公式

在多项式的讨论我们已求得 Lagrange 插值公式，即在相异位置 $\{a_i,\, 0 \le i \le n\}$ 取值 $\{b_i,\, 0 \le i \le n\}$ 而次数不高于 n 的多项式 $f(x)$ 为：

(43)
$$f(x) = b_0 f_0(x) + b_1 f_1(x) + \cdots + b_n f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i f_i(x)$$

其中

$$f_j(x) = \prod_{i\neq j}(x-a_i)\Big/\prod_{i\neq j}(a_j-a_i), \quad 1\leq j\leq n$$

上述公式稍嫌繁复，难于处理。现在不妨采用前述的待定系数法以行列式写下 $f(x)$ 系数集 $\{c_k, 0\leq k\leq n\}$ 的条件方程组

$$\begin{aligned} -y+\sum_{k=0}^{n} x^k c_k &= 0 \\ -v_j+\sum_{k=0}^{n} a_j^k c_k &= 0, \quad 0\leq j\leq n \end{aligned} \tag{44}$$

把它们想成以下述 $(n+2)\times(n+2)$ 方阵为其系数矩阵的齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} -y & 1 & x & \dots & x^n \\ -v_0 & 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_j & 1 & a_j & \dots & a_j^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_n & 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \tag{44$'$}$$

则它具有非零解 $(-1, c_0, \dots c_n)$ 的充要条件就是上述方阵的行列式等于 0，亦即

$$\begin{vmatrix} -y & 1 & x & \dots & x^n \\ -v_0 & 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_j & 1 & a_j & \dots & a_j^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_n & 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = 0 \tag{45}$$

把上述行列式以第一列 (first column) 展开，遍除以 $(-y)$ 的系数子行列式，再用熟知的 Vandermonde 行列式公式即得回 Lagrange 公式

$$-y+\sum_{k=0}^{n} v_k f_k(x) = 0 \tag{43$'$}$$

所以 (45) 和 (43) 是相通的两种插值公式（验算留作习题）。