第四章：基础分析学

数理分析是我们由表及里，定量地深入研讨大自然的重要方法，而分析学也就是为了有效运用数理分析去理解大自然而发展起来的一门数学。当年古希腊几何学家们基于「可公度性普遍成立」这个「公设」，对于定量平面几何的重要公式都给以严格的证明，从而建立起洋洋大观的定量平面几何基础初论。不可公度性的发现 (Hippasus)，从全人类的理性文明发展史来看，乃是人类在理解大自然的进程上，第一次触及空间本质中的连续性，它对于当年的几何基础初论而言，则是其所有论证的基本假设的全面否定，所以整个理论亟待补证。Eudoxus 当年就是在这样一个迫切任务的挑战下，促使他首创逼近法来达成几何基础论的重建工程。逼近法的思想简朴精到，它不但是理解连续性和重建几何基础论的有效途径（如今反观，它其实也是唯一的途径），而且其用途广泛深远，乃是整个分析学和数理分析的基本方法，所以 Eudoxus 当年在重建几何基础论的成就，其实也就是分析学的基础和源起之所在！

其实，分析学乃是以初等代数和初等几何为基础，把两者结合起来，更上层楼而发展起来的，而其本身的基础理论则在于函数的微分、积分和连续性的明确及其基本定理。这也就是为什麽通常把分析学基础论叫做微积分的原由。

1 变率与微分

顾名思义，一个函数的「变率」就是其函数值随著变数的改变的「变化速率」。例如在线性函数 $y = Ax + B$ 的情形，当 x 由 x_1 改变至 x_2 时，则相应会有 y 由 $y_1 = Ax_1 + B$ 改变至 $y_2 = Ax_2 + B$。因此 y 的改变值与 x 的改变值之间的比率为：

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{A(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = A$$

所以 $y = Ax + B$ 的「变率」就自然而然是上述常数 A。但对于其他的函数而言（即使像 $y = x^2$ 这样简单的函数），上面所计算的「x, y 改变值之比率」是会随著 (x_1, x_2) 的不同位置而不同者，所以这类函数的「变率」其实还是一个尚待定义的概念！无论如何，现在让我们先来重新剖析一下「变率」这个概念的直观内含。

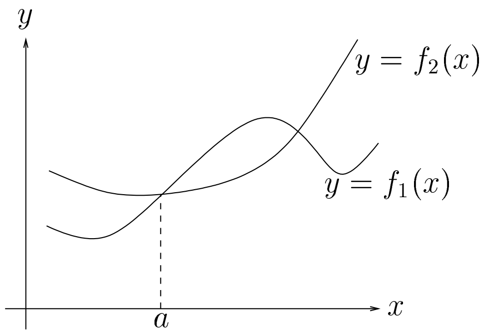
同学们试想想下述一个实际例子：设有甲、乙两人在一条公路上作自行车竞赛，分别以 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 表示甲、乙在 t–秒後和起点的距离。设甲在 $t = a$ 的时候从後赶上乙而且超越之，亦即在 t 略小于 a 时，甲在乙之後；但是在 t 略大于 a 时，则甲在乙之前。则甲在 $x = a$ 时的「速率」显然不能小于乙者。要不然，则甲是不可能在 $t = a$ 时达成後来居上的，是不？

把上述直观上十分明显的事实，改用函数框架叙述之，即为下述刻划变率的直观内含的比较原则：

【变率的比较原则】：设有两个函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 满足 $f_1(a)=f_2(a)$，而且在 $x=a$ 的邻近具有下述大小关系，即对于一个足够小的 $\delta>0$,

$$\begin{cases} \text{当 } a-\delta<x<a, & f_1(x)<f_2(x) \\ \text{当 } a<x<a+\delta, & f_1(x)>f_2(x) \end{cases} \tag{1}$$

则 $f_1(x)$ 在 $x=a$ 的变率<u>不小于</u> $f_2(x)$ 在 $x=a$ 的变率。



[图–1]

【例 1】：且让我们先以 $f(x)=x^3$ 为例，用上述比较原则去研讨它在 $x=a$ 点的变率应该是什麽。因为一次函数的变率乃是已知者，我们可以把 $f(x)$ 和 $g(x)=a^3+m(x-a)$（注意：$f(a)=g(a)$）来比较。令 $x=a+\delta$，则有

$$\begin{aligned} f(x) &= (a+\delta)^3 = a^3+3a^2\delta+3a\delta^2+\delta^3 \\ g(x) &= a^3+m\delta \\ f(x)-g(x) &= (3a^2-m)\delta+\delta^2(3a+\delta) \end{aligned}$$

由此不难看到，当 $(3a^2-m)\neq 0$ 时，只要把 $|\delta|$ 取得足够小，则 $\delta^2(3a+\delta)$ 的绝对值要远比 $(3a^2-m)\delta$ 的绝对值小，所以 $(f(x)-g(x))$ 和 $(3a^2-m)\delta$ 同号。由比较原则 (1) 即有

$$\begin{aligned} m>3a^2 &\Rightarrow f(x) \text{ 在 } x=a \text{ 点的变率} \leq m \\ m<3a^2 &\Rightarrow f(x) \text{ 在 } x=a \text{ 点的变率} \geq m \end{aligned}$$

所以「$f(x)$ 在 $x=a$ 点的变率」必须小于任何大于 $3a^2$ 的 m，又必须大于任何小于 $3a^2$ 的 m，所以唯有把它定义为 $3a^2$ 才合乎上述比较原则。

【变率的定义】：当函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 的邻近满足[例 1]和适当的一次函数的比较关系时，我们定义其在 $x=a$ 点的变率为 m。不然，则称其在 $x=a$ 点的变率是<u>不定义</u>。

【符号】：把一个给定函数 $y=f(x)$ 在其变率有定义之点的变率逐一记录，即得一个由 $f(x)$ 引导而得的新函数，通常以 $y'=f'(x)$ 记号之，称其为 $y=f(x)$ 的<u>导函数</u>。[注意，导函数 $f'(x)$ 的定义域乃是 $f(x)$ 的定义域之中，那些变率有定义之点所构成的子集。它有可能是一个真子集，甚至在某些例子是一个空集。]

【定理 1】：一个多项式函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 的变率的唯一合理定义是 $Df(a)$。

证明：其实，只要把[例 1]的方法的直接推广，就可以用来证明[定理 1]。给定一个实数 m，令

$$g(x) = f(a) + m(x-a)$$

另一方面，由 $f(x)$ 的泰勒展开式可得

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a)(x-a)^k$$

由此可见，令 $\delta = (x-a)$，则有

$$f(x) - g(x) = (Df(a) - m)\delta + \delta^2 \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a) \delta^{k-2} \right)$$

同理，当 $(Df(a) - m) \neq 0$ 时，只要把 $|\delta|$ 取得足够小，则 $(f(x) - g(x))$ 和 $(Df(a) - m)\delta$ 同号。所以由比较原则 (1) 即有

$$m > Df(a) \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = a \text{ 点的变率 } \leq m$$
$$m < Df(a) \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = a \text{ 点的变率 } \geq m$$

所以「$f(x)$ 在 $x = a$ 点的变率」的唯一合理定义就是 $Df(a)$。 □

变率与极限：

对于一个给定函数 $f(x)$ 在某一定点 $x = a$ 的变率这个微分学的基本概念，我们采取了概念上探本究源的分析。先认识到一次函数乃是变率恒为常数的「简朴已知者」，然後再由变率的直观内涵的分析认清了变率的比较原则，最後再把两者结合起来，得出具有直观上的必然性的「变率定义」。通过这样一种返璞归真的分析来探讨变率这个基本概念所应有的定义，其好处是一来使得定义的直观内含充分展现，唯有这样做才能真正体现定义的必然性和自然性，二来也使得读者有一次在基本概念层面上探索求知的体验。但是这种纯概念性的变率的定义，还要略加转换，使得它便于计算。

[分析]：

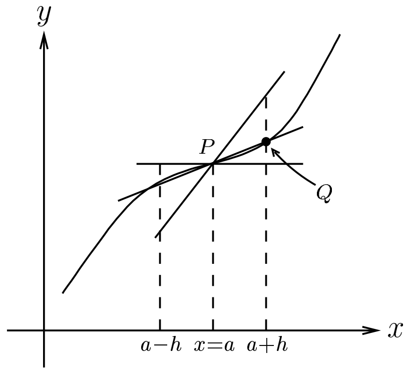
设 $y = f(x)$ 是一个满足[例 1]中所述的和一次函数的比较关系的函数，$\varepsilon > 0$ 是一个任给的正数。则存在一个足够小的 $\delta > 0$，使得 $y = f(x)$ 在 $|x-a| < \delta$ 之上的图象夹逼于过 P 点而斜率分别为 $m_0 \pm \varepsilon$ 的直线之间，如 [图–2] 所示。亦即

$$m_0 - \varepsilon < \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < m_0 + \varepsilon$$

对于任给 $|h| < \delta$ 皆成立。改用极限的术语，也就是

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = m_0$$

这也就是便于计算的函数变率的极限定义式。



[图–2]

由 [图–2] 可见，$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 的几何意义乃是割线 PQ 的斜率，而 m_0 则是图象 $y=f(x)$ 在 P 点切线的斜率。

【例 2】：$f_1(x)=\sin x,\ f_2(x)=\cos x$，则有

$$f_1'(x)=\cos x,\quad f_2'(x)=-\sin x$$

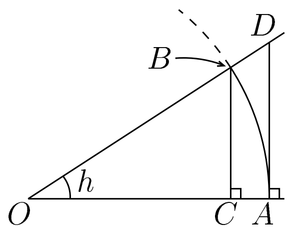
证明：由 $\sin x, \cos x$ 的复角公式易得

$$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\frac{\sin a(\cos h-1)}{h}+\frac{\cos a\sin h}{h}$$
$$\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}=\frac{\cos a(\cos h-1)}{h}-\frac{\sin a\sin h}{h}$$

因此，我们只需要在此补证下述两个基本极限，即

【引理 1】：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1,\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h}=0$

证明：



[图–3]

如 [图–3] 所示，单位半径的扇形 OAB 其面积是 $\frac{1}{2}h$, $\triangle OCB$ 的面积是 $\frac{1}{2}\sin h\cos h$, $\triangle OAD$ 的面积是 $\frac{1}{2}\tan h$。所以有下述不等式：

$$\frac{1}{2}\sin h\cos h<\frac{1}{2}h<\frac{1}{2}\tan h=\frac{1}{2}\frac{\sin h}{\cos h}$$

由此即得：

$$\cos h<\frac{\sin h}{h}<\frac{1}{\cos h}=\sec h$$

当 $h\to 0$ 时，$\cos h\to 1, \sec h\to 1$。所以上述始终夹逼于 $\cos h$ 和 $\sec h$ 之间者，即 $\frac{\sin h}{h}$，也必然趋于 1 为其极限，亦即已证得：

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

再者，

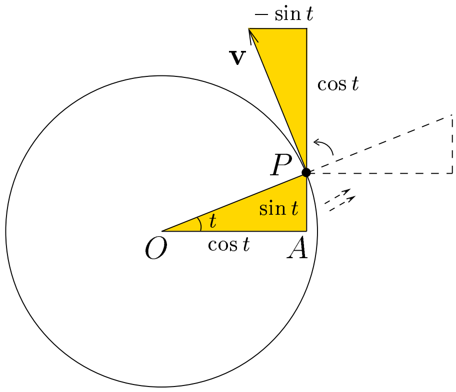
$$\frac{\cos h-1}{h}=\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}=\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h+1)}=-\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{1+\cos h}$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{\sin h}{h}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{1+\cos h}=-1\cdot 0=0 \qquad \square$$

【例 3】：在[例 2]的两个公式，其实还可以用一个具有物理意义的方法来证明的。当动点 P 在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上作单位速率运动时，其 $x, y-$坐标表示式分别为：

$$x=\cos t,\quad y=\sin t$$



[图−4]

由几何的熟知事实，其速度向量是垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 的单位长向量，易见其 x, y 分量分别是 $-\sin t$ 和 $\cos t$。所以应该有：

$$\frac{d}{dt}\cos t=-\sin t,\quad \frac{d}{dt}\sin t=\cos t$$

【定理 3】：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是可导函数，则有

$$\begin{aligned}\big[f(x)+g(x)\big]'&=f'(x)+g'(x)\\ \big[f(x)\cdot g(x)\big]'&=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\\ \Big[\frac{1}{f(x)}\Big]'&=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}\qquad (\text{当 } f(x)\neq 0)\end{aligned}$$

[注]：上述公式的意义是当 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 在该点有定义时，则上述公式中的左侧函数在该点的变率也就有定义，而且其值等于右侧所给者。

证明：由定义的极限式易证：

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{(f(a+h)+g(a+h))-(f(a)+g(a))}{h}\\ =&\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=f'(a)+g'(a)\\ &\lim_{h\to 0}\frac{(f(a+h)g(a+h))-(f(a)g(a))}{h}\\ =&\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(a+h)+f(a)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)\end{aligned}$$

再者，因为

$$\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}\right\}=-\frac{1}{f(a+h)\cdot f(a)}\cdot\frac{1}{h}(f(a+h)-f(a))$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}\right\}=-\lim_{h\to 0}\frac{1}{f(a+h)f(a)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=-\frac{1}{f(a)^2}f'(a)$$

【定理 4】：设 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 在 $u_0=g(x_0)$ 和 x_0 点皆为可微，则有复合函数 $y=f(g(x))$ 在 x_0 点亦为可微，而且其变率为 $f'(u_0)g'(x_0)$，亦即对于复合函数 $f(g(x))$ 的微分，有下述常用好用的公式，即

$$f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

证明：令 $\Delta u=g(x_0+\Delta x)-g(x_0)$, $\Delta y=f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))$. 由所设易见当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$, $\Delta y\to 0$. 让我们先讨论 $g'(x_0)\neq 0$ 的情形。当 Δx 足够小而且非零时，Δu 恒为非零，所以即有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\ \Rightarrow\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

请注意，在 $g'(x_0)=0$ 的情形，当 Δx 足够小而且非零时，是不能保证 Δu 恒为非零的。而在 $\Delta u=0$ 的时候当然不能把 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 改写成 $\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$（不能除以 0！）。其实在这种特殊情形 Δy 根本就是 0，又何必画蛇添足去改写它呢？总之，不论 Δu 是否为零，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

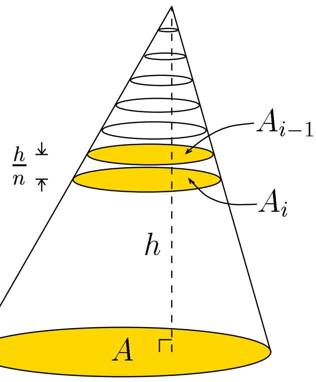
在 $g'(x_0)=0$ 的情形是依然成立的。 □

2 总和与积分

假如我们用一个圆锥形的杯装水倒进一个同底同高的圆柱形的杯时，会发现需要三满杯圆锥形杯的水才可注满一个圆柱形杯。相信在古时从类似的实验也自然地引导古代中国和古希腊的几何学家发现了圆锥体的体积公式，亦即圆锥体体积为同底同高的圆柱体体积之三分之一。它是三角形面积公式的「高一维」推广，因为三角形面积就是同底同高的平行四边形的面积之一半。在二维的情况我们很容易就可以把一个平行四边形切割成两个全等的三角形，但是在三维的情况我们并没有这种简单的切割重组方法！相信有很多古希腊的几何学家曾努力尝试寻找类似的切割重组方法求证锥体的体积公式，但所有尝试皆终归失败，直至 Eudoxus 开创了逼近法，锥体体积公式才能成功得证。这其实是最早的一个具有基本重要性的积分求和，也是现代积分学之源起。

锥体体积公式的 Eudoxus 证明：

如 [图–5] 所示，一个底面积为 A、高度为 h 的锥体可以用平行于底面的平面切割成 n 块均一厚度的薄片：



［图–5］

由顶层向下数的第 i 块薄片，其底面积为 A_i，顶面积为 A_{i-1}。由相似形定理，古希腊的几何学家已知

$$A_i : A = \left(\frac{i}{n}h : h\right)^2 = \left(\frac{i}{n}\right)^2, \quad \text{即 } A_i = \frac{i^2}{n^2}A$$

由此易知其第 i 块薄片之体积是于 $\frac{h}{n} \cdot A_{i-1}$ 和 $\frac{h}{n} \cdot A_i$ 两者之间，亦即

$$\frac{h}{n}A_{i-1} = \frac{(i-1)^2}{n^3}hA < V_i < \frac{i^2}{n^3}hA = \frac{h}{n}A_i, \quad 1 \le i \le n$$

把上述的不等式整合起来，便得出

$$\frac{hA}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 < \sum_{i=1}^{n} V_i = V < \frac{hA}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

接著 Eudoxus 便应用已知的 $\sum i^2$ 求和公式把上式重写成

$$\frac{hA}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) < V < \frac{hA}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

至此，Eudoxus 发现上述不等式对所有正整数 n 都成立，但无论 n 如何增大，V 的值（锥体体积）是不变的！而当 n 无限地增大时，上式的上限和下限之差别为

$$\frac{hA}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{hA}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) = \frac{hA}{n}$$

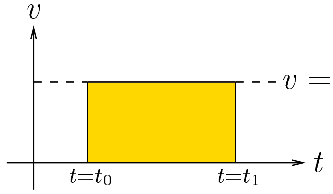
这个量会无限地缩小（即可小于任意给出的正实数）。由此可见，唯一可以对所有 n 能满足上述不等式的量必定是 $\frac{hA}{3}$，因此得证

$$V = \frac{1}{3}hA$$

【历史的注记】：从计算的角度来看，上一节所讨论的<u>微分</u>是相当简单的一种比值之极限；而<u>积分</u>则是一种无限分割求和的极限计算，它显然要比微分计算要来得复杂得多。但是在人类理性文明发展史上，积分的出现要比微分的起始早两千年。前者的首现就是上述 Eudoxus 对于锥体体积公式的论证，而後者则在 Kepler 研究行星运行和 Galileo 研究自由落体中才出现其雏形。如今回顾，此事决非偶然，耐人寻思。究其原因，大概是因为那些激

发无限分割求和的几何问题既自然、重要而且其难度上又富有挑战性；如今反思，要克服这种几何问题，其实别无他途！所以积分的想法，自然而然地起源于几何学，实非偶然。

要给积分求和这个基本概念赋以明确的定义，自然又得用 Eudoxus 逼近原理。首先，让我们来看一下那一种函数的「求和」是简单而且基本的。例如一列以 c 为其等速行进的火车在 $t=t_0$ 到 $t=t_1$ 这一段时间所走的总里程显然就是 $c\cdot(t_1-t_0)$。若用函数的图象给以几何化的表达，亦即常函数 $v=c$ 在区间 $[t_0,t_1]$ 上方如 [图–6] 所示的面积等于 $c\cdot(t_1-t_0)$：

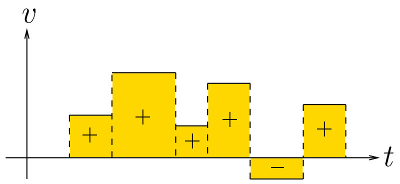


[图–6]

由此易见，一个常数函数 $f(t)=c$ 在区间 $[t_0,t_1]$ 上的积分乃是 $c(t_1-t_0)$。而它相应的几何量，就是 [图–6] 所示的区域的面积。当然，我们还可以把这种最为简单的例子稍加推广，即

【例 4】：设 $v=f(t)$ 是一个分段常数函数，亦即

$$f(t)=\begin{cases} c_1, & t_0\le t<t_1 \\ c_2, & t_1\le t<t_2 \\ \vdots & \\ c_k, & t_{k-1}\le t\le t_k \end{cases}$$



[图–7]

则可以分段用常数函数求和而得其总和为

$$c_1(t_1-t_0)+c_2(t_2-t_1)+\ldots+c_k(t_k-t_{k-1})$$

为了往後符号上的统一，我们将以积分符号表达上述分段求和之值，即当 $f(t)$ 是分段常数函数时，

$$\int_{t_0}^{t_k} f(t)dt=\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} c_i dt=\sum_{i=1}^{k} c_i(t_i-t_{i-1})$$

[因为分段常数函数的图象有如高高低低的阶梯，所以通常称之为阶梯函数。这种函数的积分就是上述简单明了的分段地以常数函数求和，而它们也就是我们将要在积分层面，用来以简御繁的基本函数。]

由积分求和的直观内含，显然应该有下述比较原则，即

【积分求和的比较原则】：设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上恒不小于 $g(x)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分当然也不小于 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分。以算式表达，即为

$$f(x)\ge g(x)\ \forall\, a\le x\le b\ \Rightarrow \int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$$

在明确了积分求和的比较原则之後，自然又可以效法 Eudoxus 运用逼近原理，用一系列妥为选取的阶梯函数去上、下夹逼一个给定函数，从而确立它在一个给定区间 $[a,b]$ 上的积分所应有之值。这样也就可以给相当广泛的各种各样函数的积分，赋予严格的定义。其具体做法，述之如下：

设 $f(x)$ 是一个定义于有限闭区间 $[a,b]$ 上的函数。若存在有上、下夹逼阶梯函数列 $\{G_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$，满足下列条件，即

$$g_1(x) \leq \ldots \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq \ldots \leq f(x) \leq \ldots \leq G_{n+1}(x) \leq G_n(x) \leq \ldots \leq G_1(x)$$

对于所有 $a \leq x \leq b$ 成立；而且

$$\int_a^b G_n(x)dx - \int_a^b g_n(x) \to 0$$

由积分的比较原则，我们所要确定的 $\int_a^b f(x)dx$ 乃是一个分别被下述递增及递减数列

$$\left\{\int_a^b g_n(x)dx\right\} \quad \text{和} \quad \left\{\int_a^b G_n(x)dx\right\}$$

夹逼于其间者，所以它必然就是那个唯一满足对于所有 n 皆有下述夹逼不等式者也，即

$$\int_a^b g_n(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b G_n(x)dx$$

【定义】：满足上述条件的函数 $f(x)$ 定义为：在区间 $[a,b]$ 上的<u>可积函数</u>，而由上述夹逼数列所唯一确定之值则定义为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分，以符号 $\int_a^b f(x)dx$ 记之。

【定理 5】：设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的一个单调递增（或递减）函数，则它是可积的。

<u>证明</u>：递增和递减这两种情形的论证在本质上是一样的。兹讨论前者的证明如下：

将 $[a,b]$ 等分成 2^n 段，设其分点为 $\{a_i, 1 \leq i \leq 2^n - 1\}$, $a_0 = a$, $a_{2^n} = b$。令 $g_n(x)$（及 $G_n(x)$）为在 $[a_{i-1}, a_i)$ 分段上取常数值 $f(a_{i-1})$（及 $f(a_i)$）的阶梯函数。由 $f(x)$ 的单调递增性可知

$$g_n(x) \leq f(x) \leq G_n(x)$$

对于所有 $a \leq x \leq b$ 恒成立，而且有

$$\begin{aligned}\int_a^b G_n(x)dx - \int_a^b g_n(x)dx &= \left(\frac{b-a}{2^n}\right)\sum_{i=1}^{2^n} f(a_i) - \left(\frac{b-a}{2^n}\right)\sum_{i=0}^{2^n-1} f(a_i) \\ &= \frac{b-a}{2^n}(f(b) - f(a)) \to 0 \quad \text{当 } n \to \infty\end{aligned}$$

这也就证明了 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的可积性。 □

【推论】：设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的分段单调函数，亦即存在有限个分点 $\{a_i, 1 \leq i \leq k-1\}$，使得 $f(x)$ 在每一个分区间 $[a_{i-1}, a_i]$ 之上都是单调函数，则 $f(x)$ 是可积的。

证明：由所设和[定理 5]，$f(x)$ 在每一分区间 $[a_{i-1}, a_i]$ 之上都是可积的。把它们的可积条件之中的上、下夹逼阶梯函数列 $\{G_{i,n}(x)\}$ 和 $\{g_{i,n}(x)\}$, $1 \le i \le k$，组合起来，亦即当 $a_{i-1} \le x < a_i$ 时

$$G_n(x) = G_{i,n}(x), \quad g_n(x) = g_{i,n}(x)$$

则易见 $\{G_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$ 构成了 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 之上的上、下夹逼阶梯函数列。所以 $f(x)$ 在全区间之上也是可积的，而且有

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx \quad (a_0 = a, a_k = b) \qquad \square$$

[注]：很多常用的函数都是分段单调的，所以它们都是可积的。但是上述简单的论证仅仅证明其可积性，亦即其在给定区间上的积分的唯一存在性。至于这种由两列项数无限增大的和式所左、右夹逼者的积分值通常是很难用这种和式来直接计算其极限值的。

【例 5】：设 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是在 $[a,b]$ 之上可积者，c_1, c_2 是任给常数，则 $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$ 也是在 $[a,b]$ 之上可积者而且

$$\int_a^b [c_1f_(x) + c_2f_2(x)]dx = c_1\int_a^b f_1(x)dx + c_2\int_a^b f_2(x)dx$$

[证明留作习题]

【例 6】：设 $f(x)$ 是分别在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 之上可积者，则 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 之上也是可积者，而且

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

[证明留作习题]

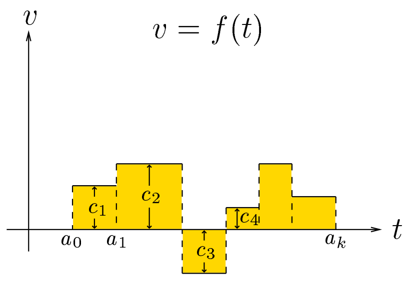
【例 7】：$\displaystyle\int_0^b xdx = \frac{1}{2}b^2, \int_0^b x^2dx = \frac{1}{3}b^3, \int_0^b x^3dx = \frac{1}{4}b^4$

[证明留作习题]

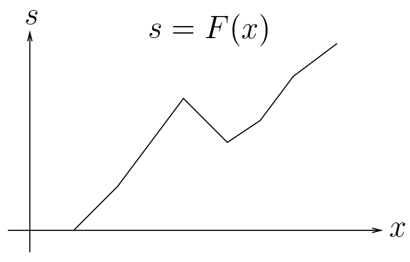
【例 8】：设 $f(t)$ 是一个阶梯函数，它在分区间 $[a_{i-1}, a_i)$ 上取常数值 c_i, $1 \le i \le k$。令

$$F(x) = \int_{a_0}^x f(t)dt, \quad a_0 \le x \le a_k$$

则 $F(x)$ 乃是一个分段一次函数，亦即其图象为一折线，它在分区间 $[a_{i-1}, a_i]$ 上者乃是一个斜率等于 c_i 的直线段。$v = f(t)$ 和 $s = F(x)$ 的图象分别如 [图–8] 和 [图–9] 所示。



[图–8]



[图–9]

若用算式表达，则有

$$
\begin{aligned}
F(x) &= c_1(x-a_0), \quad a_0 \le x \le a_1 \\
F(x) &= c_1(a_1-a_0)+c_2(x-a_1), \quad a_1 \le x \le a_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F(x) &= \sum_{j=1}^{i-1} c_j(a_j-a_{j-1})+c_i(x-a_{i-1}), \quad a_{i-1} \le x \le a_i \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

3 实数系的连续性与连续函数的基本性质

直线是连续不断的，但是一剪即断，这是几何直观上至为明显者；但是几何直观是难以用来计算或用作数量分析的。Eudoxus 所创的逼近法和逼近理论，亦即任给左、右夹逼数列总是（唯一）存在著为其所夹逼的实数，则把上述直观几何概念转化为便于讨论的「直线连续性的解析描述」，从而重建定量几何基础理论及创积分法之雏形。本节将以直线（亦即实数系）的连续性为基础，进而研讨函数的连续性。

3.1 实数系的连续性

用现代的术语来说，Hippasus 不可公度量的发现使得我们认识到<u>有理数系</u>是不足以表达直线段的<u>长度</u>者，亦即由长度的度量所自然产生的数系——称之为实数系——乃是一个包含有理数系为其真子集的数系，而 Eudoxus 所创的逼近法则是用有理数去理解实数的有效途径。用通常的语句来说，乃是一种以「已知」去理解「未知」、以「简」去御「繁」的具体实践，亦即任给实数皆可用有理数列去逼近之，从而把实数系的研讨，归于其逼近有理数列的研讨。

为了便于往後分析学的研讨，让我们改用现代的数列术语来叙述 Eudoxus 的逼近原理和逼近法：

（一）<u>Eudoxus 比较原则</u>：

当年 Eudoxus 在运用其所创的逼近法去克服不可公度量在当年定量几何基础论所产生的困难时，他充分认识到不可公度的线段比和有理数之间比较大小的原则必须先行明确。前者是有待明确的「未知量」，而後者则是业已熟悉的「已知量」，两者当然不会相等，所以乃是或大、或小的不等关系。由此可见，唯有明确了两者之间比较大小的直观内含之後，才能够运用这种大小关系去以已知研讨未知。此事乃是运用逼近法去研讨各种各样未知量的首务之要。其实，也只有确定了体现其正确的直观内涵的比较原则，才能确保基于这种比较原则，用逼近法所逼近者乃是具有正确直观内含的待定者。例如在研讨不可公度线段比 $\overline{AB}:\overline{A'B'}$ 时，Eudoxus 明确其比较原则为

$$\overline{AB}:\overline{A'B'} \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} \frac{m}{n} \Leftrightarrow n\overline{AB} \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} m\overline{A'B'}$$

（二）Eudoxus 逼近原理：

对于一个给定的不可公度线段比 $\overline{AB}:\overline{A'B'}$ 和任给正整数 N，恒有一个非负整数 m，使得

$$\frac{m}{N}<\overline{AB}:\overline{A'B'}<\frac{m+1}{N}$$

改用现代术语，亦即对于任给一个正的非分数 λ，恒有一对左、右夹逼的分数数列 $\{a_N\}$ 和 $\{b_N\}$，满足

$$a_N<\lambda<b_N,\quad b_N-a_N=\frac{1}{N}$$

（三）Eudoxus 等量定义和唯一性：

当年 Eudoxus 对于两对不可公度的线段比 $\lambda=\overline{AB}:\overline{A'B'}$ 和 $\mu=\overline{AC}:\overline{A'C'}$ 相等的定义乃是两者和所有分数 $\{\frac{m}{n}\}$ 都具有同样的大小关系。改用现代术语表达，亦即下述熟知的唯一性：若 λ 的上述左、右夹逼数列也是 μ 的左、右夹逼数列，即

$$a_N<\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\end{Bmatrix}<b_N,\quad b_N-a_N=\frac{1}{N}$$

对于所有正整数 N 恒成立，则 $\lambda=\mu$。上述唯一性的要点在于 b_N-a_N 在 N 无限增大时可以小到任意小，而 λ 和 μ 所可能有的差别，即 $|\lambda-\mu|$，总是要比 b_N-a_N 要小者也，所以它必须是零（亦即 $\lambda=\mu$）。以现代的观点和术语来描述：任给实数 λ 皆可用一对左、右夹逼分数数列 $\{a_N\}$ 和 $\{b_N\}$ 来加以刻划，它们之间的关系是

$$a_1\le\ldots\le a_N\le a_{N+1}\le\ldots\le\lambda\le\ldots\le b_{N+1}\le b_N\le\ldots\le b_1$$

而且 $(b_N-a_N)\to 0$（小到任意小）。我们将以符号 $a_N\to\lambda\leftarrow b_N$ 表达之。再者，因为 $(b_N-a_N)\to 0$，所以被满足上述条件的一对数列 $\{a_N\}$ 和 $\{b_N\}$ 所左、右夹逼者是唯一的，亦即

$$a_N\to\lambda\leftarrow b_N\ \text{和}\ a_N\to\mu\leftarrow b_N\ \Rightarrow\ \lambda=\mu$$

（四）左、右夹逼数列的「被夹逼者」的存在性和直线的连续性：

相对于一对左、右夹逼数列之「被夹逼者」的唯一性，当然还可以探讨其存在性的意义何在？在当年 Eudoxus 为了重建几何基础论的研讨中，其所用的夹逼数列乃是为了夹逼一个已给的不可公度线段比而造构者，所以是「有的造矢」，其存在性当然不成问题，而他所要用者则是其「唯一性」。到了现代的分析学，逼近法的应用的范畴和用法大为扩展和深化，其中就自然而然会遇到确立某种构造而得的夹逼数列的「被夹逼者」的存在性问题。归根究底，这种存在性的确立（亦即论证之）当然要有所本（证明是不可能无中生有的！）；而分析学中各种各样存在性定理之所本就是下述最为简朴基本的存在性，亦即：

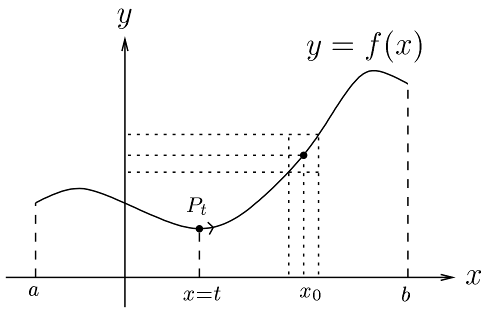
「任给一对左、右夹逼数列 $\{a_N\}$ 和 $\{b_N\}$，恒存在著被其所夹逼的实数。」

在此，也许有人会问：「为什麽？」对于上述问题的恰当回答并非是「设法加以论证」。因为这种「挖空心思」的论证，其所本者很可能还比不上所证者的直观性和简朴性，岂非画蛇添足!? 总之，上述问题的恰当回答乃是直截了当地明确上述存在性的直观内含乃是直线是连续不断的连续性。我们对于一条直线的几何直观是：它本身是连续不断的，但是一

剪即断。一条直线 ℓ 上任给一点 P 把直线分隔成不连通的两段。由此可见，一条直线是不能缺掉其中任何一点的，否则直线就不是连续不断的了，是不？归根究底，上述存在性的「否定」的直观内含就是缺掉夹逼于其间的那个点（亦即直线具有切断点是也），所以上述存在性的肯定乃是直线的连续性的解析描述（亦即数量化，确切化），通常把它叫做实数系的连续性。它是整个分析学的一个重要基石，是所有分析学的存在性定理的论证依据。我们将在往後的章节中逐步逐样解说逼近法和连续性在数理分析中既深且广的用场。

3.2 连续函数的基本概念

首先，让我们先来分析一下函数的连续性的直观内含和应该如何赋以明确的定义。用函数 $y=f(x)$ 的图象的几何直观来说，$f(x)$ 在一个区间 $[a,b]$ 上的连续性也就是其图象乃是一条「连续不断」的曲线。如 [图–10] 所示，它可以看成一个动点 $P(t,f(t))$ 在时间由 $t=a$ 到 $t=b$ 所经过的轨迹，当 $x=t$ 作微小的变动时，$y=f(t)$ 也只能作微小的变动。



[图–10]

把上述直观内含局部化到一个取定点 x_0 的微小邻近来看，亦即：「$f(x)$ 和 $f(x_0)$ 的差别是可以小到任意小的，只要 x 和 x_0 的差别小到足够小」。改用数学语句来说，即为：

$$\text{「对于任给 } \varepsilon>0\text{，恒有 } \delta>0 \text{ 使得 } |x-x_0|<\delta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\text{」}$$

其实，这也就是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 的定义是也。

【定义】：函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续的定义就是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$；$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 之上连续的定义乃是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 之中的每一点 x_0 都是连续的（亦即在 $[a,b]$ 上到处连续）。

我们也可以改用数列术语来叙述 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 之上的连续性，即：

设 $\{s_n\}$ 是一个取值于 $f(x)$ 的定义区间 $[a,b]$ 之中的数列，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lambda$，则恒有

$$\lim_{n\to\infty} f(s_n)=f(\lambda), \quad \text{亦即} \quad \lim_{n\to\infty} f(s_n)=f(\lim_{n\to\infty} s_n)$$

[注一]：一个函数 $f(x)$ 在一个给定点 x_0 的连续性乃是上述极限式对于所有以 x_0 为其极限值的数列皆成立。由此可见，一个函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 之上的连续性乃是上述局部化的连续性对于 $[a,b]$ 之中的每一点皆成立，其所包含的条件是非常庞大的。

[注二]：自然界各种各样的动态事物，其变动的常态是逐渐的改变，亦即连续地改变，所以描述它们的参变量之间的函数往往自然而然地是连续函数。当然也会有某些特殊的临界情况，会出现不连续的改变，其相应的函数就会出现不连续的「奇点」。

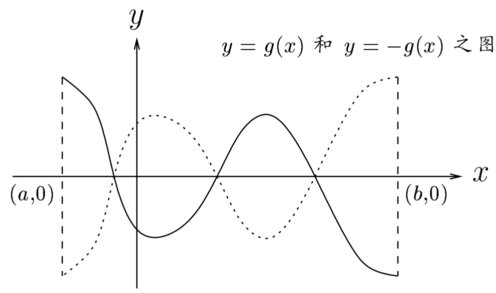
接著让我们研讨在闭区间 $[a,b]$ 之上的连续函数所具有的某些基本性质，它们在分析学的基础理论中扮演著重要的角色。

【定理 6】（中间值定理）：设 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 之上连续的函数，而 c 是介乎于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任给实数，则至少存在一个 a,b 之间的点 x_0 使得 $f(x_0)=c$。

证明：令 $g(x)=f(x)-c$，则由上所设

$$g(a)\cdot g(b)=(f(a)-c)\cdot(f(b)-c)<0 \tag{2}$$

而我们所要证明者就是存在 $a<x_0<b$ 使得 $g(x_0)=0$。由 $g(x)$ 的图象来看，它是一条端点（即 $(a,g(a))$ 和 $(b,g(b))$）分居于 x–轴的两侧的一条连续曲线。从几何直观上是可以想到它必须和 x–轴至少有一个交点。



[图–11]

首先，我们要认清上述存在性的证明自然要用到实数系连续性的解析描述，即那个左、右夹逼数列「所夹逼者」的存在性。而下述证法也就是利用 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 之上的连续性和 $g(a)\cdot g(b)<0$ 去构造一对左、右夹逼数列 $\{a_n\}\rightarrow\leftarrow\{b_n\}$，使得其所夹逼者 x_0 就是所求者，亦即 $g(x_0)=0$。

以 $[a,b]$ 的中点 $\frac{1}{2}(a+b)$ 把 $[a,b]$ 二等分成左、右两段。若 $g(\frac{1}{2}(a+b))=0$ 则定理业已得证。不然，则 $g(\frac{1}{2}(a+b))\neq 0$ 必然和异号的 $\{g(a),g(b)\}$ 中之一异号，因此必有一个半段 $[a_1,b_1]$ 依然满足 $\{g(a_1),g(b_1)\}$ 异号者。如此逐次二等分（不妨设每次的分点都不是 $g(x)$ 的零点），每次总是由 $[a_n,b_n]$ 取其半段 $[a_{n+1},b_{n+1}]$ 使得 $\{g(a_{n+1}),g(b_{n+1})\}$ 依然保持异号。这样就构造而得一对左、右夹逼数列 $\{a_n\}\rightarrow\leftarrow\{b_n\}$，它具有

$$g(a_n)\cdot g(b_n)<0 \quad \text{对于所有 } n \text{ 成立} \tag{3}$$

在此，由实数系的连续性即得它们所夹逼者的存在性，令其为 x_0，亦即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=x_0=\lim_{n\to\infty}b_n$$

再者，由 $g(x)$ 的连续性和 (3)–式即有

$$0\geq\lim_{n\to\infty}g(a_n)\cdot g(b_n)=\lim_{n\to\infty}g(a_n)\cdot\lim_{n\to\infty}g(b_n)=g(x_0)\cdot g(x_0)\quad\Rightarrow\quad g(x_0)=0 \qquad \square$$

【定义】：一个定义于区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$，若其值恒小于或等于一个给定常数 K，则称之谓上有界者，而 K 则是 $\{f(x),a\leq x\leq b\}$ 的一个上界，亦即

$$f(x)\leq K,\quad a\leq x\leq b$$

若把上式的 "$\leq K$" 改为 "$\geq K$" 恒成立，则称 K 为 $\{f(x), a \leq x \leq b\}$ 的一个下界，而 $f(x)$ 则为下有界者。

上、下均有界者，通常简称为有界者。

【引理 2】：设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的一个连续函数，则 $f(x)$ 是有界者。

证明：上有界性和下有界性的证明本质完全一样，我们将用反证法来证明其上有界性。

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 之上没有上界。将 $[a,b]$ 等分为两个半段，则 $f(x)$ 至少在一个半段上没有上界。如此逐次二等分，每次取其半段，依然保持 $f(x)$ 在其上是没有上界者，这样就构造而得一对左、右夹逼数列 $\{a_n\} \to\leftarrow \{b_n\}$，使得 $f(x)$ 在 $[a_n, b_n]$ 之上是没有上界的。在此，再用实数系的连续性得知存在被其所夹逼的 x_0，亦即

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n$$

亦即在 x_0 的任意小的邻近 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0$，总是包含著一个 n 足够大的 $[a_n, b_n]$。

一方面由 $f(x)$ 在 x_0 点的局部化连续性得知当 δ 足够小时

$$|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

所以 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 之上显然是有界的，所以在它的子区间 $[a_n, b_n]$ 之上当然也是有界的。但是另一方面，由上述 $\{a_n\} \to\leftarrow \{b_n\}$ 的构造法，我们一直保持著 $f(x)$ 在 $[a_n, b_n]$ 上的无上界性。两者显然矛盾，这也就证明原本的假设和 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 之上的连续性是互相矛盾的，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 之上是有界的。 $\square$

【引理 3】：设 $\mathcal{S}$ 是一个有上界的非空实数子集，则在其所有上界之中，必有其最小者，称之谓 $\mathcal{S}$ 的极小上界。同理，设 $\mathcal{S}$ 是一个有下界的非空实数子集，则在其所有下界之中，必有其最大者，称之谓 $\mathcal{S}$ 的极大下界。

证明：若 $\mathcal{S}$ 中有一个极大者 s_0（或极小者 s_0'）则它显然就是 $\mathcal{S}$ 的极小上界（或极大下界）。所以我们不妨在下述证明中设 $\mathcal{S}$ 中没有极大者（或极小者）。

设 K_1 是 $\mathcal{S}$ 的一个上界，k_1 是 $\mathcal{S}$ 的非上界（亦即至少具有一个大于 k_1 的 $s \in \mathcal{S}$）。将 $[k_1, K_1]$ 等分为两段，选取其半段 $[k_2, K_2]$ 满足 K_2 为 $\mathcal{S}$ 的上界而 k_2 则并非 $\mathcal{S}$ 的上界。如此逐次两分，每次由 $[k_n, K_n]$ 选取其半段 $[k_{n+1}, K_{n+1}]$，使得 K_{n+1} 和 k_{n+1} 分别保持其 $\mathcal{S}$ 的上界性和非上界性。如此即得一对左、右夹逼数列 $\{k_n\} \to\leftarrow \{K_n\}$。不难验证它们所夹逼者，就是 $\mathcal{S}$ 极小上界。 $\square$

【定理 7】（极小值、极大值存在定理）：设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 之上的一个连续函数，则 $[a,b]$ 之中存在 $\hat{x}_0$ 和 $\overset{\vee}{x}_0$ 使得

$$f(\overset{\vee}{x}_0) \leq f(x) \leq f(\hat{x}_0)$$

对于所有 $a \leq x \leq b$ 恒成立。

证明：由[引理 2]得知 $\mathcal{S} = \{f(x), a \leq x \leq b\}$ 是有界的。再由[引理 3]得知 $\mathcal{S}$ 分别具有其极小上界和极大下界，以 M 和 m 记之。而本定理所要证明者乃是在 $[a,b]$ 之中分别存在 $\hat{x}_0$ 和 $\overset{\vee}{x}_0$ 使得 $f(\hat{x}_0) = M$, $f(\overset{\vee}{x}_0) = m$。其证法依然是用二分法去分别构造两对左、右夹逼数

列 $\{a_n\}\to\leftarrow\{b_n\}$ 和 $\{a'_n\}\to\leftarrow\{b'_n\}$，其所夹逼者分别是所求证其存在性的 $\hat{x}_0$ 和 $\overset{\vee}{x}_0$。其逐步归纳构造法则分别如下：

设 $\mathcal{S}=\mathcal{S}'\cup\mathcal{S}''$ 是一个有界实数集，则在 $\mathcal{S}'$ 和 $\mathcal{S}''$ 之中至少有其一，它的极小上界（或极大下界）和 $\mathcal{S}$ 的极小上界（或极大下界）相同。基于上述简单事实我们可以逐步归纳地由 $[a_n,b_n]$ 和 $[a'_n,b'_n]$ 分别取其半段为 $[a_{n+1},b_{n+1}]$（及 $[a'_{n+1},b'_{n+1}]$）使得 $f(x)$ 在 $[a_{n+1},b_{n+1}]$ 上（及 $[a'_{n+1},b'_{n+1}]$ 上）的极小上界（及极大下界）依然是 M（及 m）。

令 $\hat{x}_0$（及 $\overset{\vee}{x}_0$）分别是 $\{a_n\}\to\leftarrow\{b_n\}$（及 $\{a'_n\}\to\leftarrow\{b'_n\}$）所左、右夹逼者。不难用 $f(x)$ 在 $\hat{x}_0$（及 $\overset{\vee}{x}_0$）的局部化连续性结合上述所构造的 $[a_n,b_n]$ 和 $[a'_n,b'_n]$ 的性质验证 $f(\hat{x}_0)=M$ 及 $f(\overset{\vee}{x}_0)=m$。[其验证留作习题] □

<u>均匀连续性</u>：

在一个给定函数 $f(x)$ 的局部化逐点连续性的解析描述中，那个足够小的 $\delta>0$ 使得

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

是随著 $\varepsilon>0$ 和给定点 x_0 的取定而定的。一般来说，对于同一 $\varepsilon>0$，在 x_0 点业已足够小的 δ 对另外一点 x'_0 就可能不够小。是否能够选取一个仅仅随著 $\varepsilon>0$ 而定的 $\delta>0$，它对于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 之上每一点的局部化连续性都足够小呢？亦即是否对于任给 $\varepsilon>0$，总是有一个足够小的 $\delta>0$，使得

$$|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

能够对于所有 $x_1,x_2\in[a,b]$ 均成立呢？这种比较划一的连续性叫做均匀连续性。

【定理 8】：设 $f(x)$ 是一个在 $[a,b]$ 上的连续函数，则它也是在 $[a,b]$ 上均匀连续的。

<u>证明</u>：我们将用反证法，亦即由上述命题的「否定命题」出发，运用 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续性和实数系连续性去推导矛盾。为此，我们得先将其否定命题的逻辑内含加以明确：

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上并非均匀连续者，乃是存在有一个 $\varepsilon_0>0$ 使得<u>不论</u> $\delta>0$ 有多麼小，在 $[a,b]$ 之中总会有一对相距小于 δ 的 $\{x_1,x_2\}$，使得 $|f(x_1)-f(x_2)|>\varepsilon_0$。

我们把上述命题以「$P(\varepsilon_0)$ 在 $[a,b]$ 上成立」简称之。

把 $[a,b]$ 等分为两段，则其中至少有一个半段 $[a_1,b_1]$ 使得 $P(\varepsilon_0)$ 依然在 $[a_1,b_1]$ 上成立。假若不然，亦即有一个足够小的 δ 使得

$$|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon_0$$

对于 $\{x_1,x_2\}$ 同在前半段或同在後半段时皆成立。再者，由 $f(x)$ 在分点 $\frac{1}{2}(a+b)$ 的连续性，即有另一个足够小的 $\delta'>0$ 使得

$$\left|x-\frac{1}{2}(a+b)\right|<\delta' \Rightarrow \left|f(x)-f(\frac{1}{2}(a+b))\right|<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

不妨设 $\delta\le\delta'$。因此当 x_1,x_2 分居于前、後半段时，亦有

$$\left|x_1-\frac{1}{2}(a+b)\right|<\delta\le\delta',\quad \left|x_2-\frac{1}{2}(a+b)\right|<\delta\le\delta'$$
$$\Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|\le\left|f(x_1)-f(\frac{1}{2}(a+b))\right|+\left|f(x_2)-f(\frac{1}{2}(a+b))\right|<\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_0}{2}=\varepsilon_0$$

所以和 $P(\varepsilon_0)$ 在 $[a,b]$ 上成立的假设相矛盾。由此可见 $P(\varepsilon_0)$ 至少在一个半段 $[a_1,b_1]$ 上成立，而且我们可以逐次二等分，每次选取其中半段 $[a_n,b_n]$，依然保持 $P(\varepsilon_0)$ 在 $[a_n,b_n]$ 成立。这样，就构造而得一对左、右夹逼数列 $\{a_n\}\rightarrow\leftarrow\{b_n\}$, $P(\varepsilon_0)$ 在所有 $[a_n,b_n]$ 上皆成立。由实数系连续性，存在著它们所夹逼的 x_0。由 $f(x)$ 在 x_0 点连续性即有一个足够小的 δ 使得

$$|x-x_0|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

再者，当 n 足够大时，显然有 $[a_n,b_n]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)$。因此

$$\begin{aligned}&x_1,x_2\in[a_n,b_n]\Rightarrow|x_1-x_0|<\delta,\quad|x_2-x_0|<\delta\\ \Rightarrow\;&|f(x_1)-f(x_2)|\;\le\;|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_0}{2}=\varepsilon_0\end{aligned}$$

显然和所构造的 $P(\varepsilon_0)$ 在 $[a_n,b_n]$ 成立相矛盾。归根研底，上述矛盾证明了原始假设 $P(\varepsilon_0)$ 在 $[a,b]$ 上成立乃是不能成立的。这也就证明了 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的均匀连续性。 □

3.3 Sturm 定理

设 $f(x)$ 是一个实系数多项式，$[a,b]$ 是一个给定区间。是否有一个有效能算的判定法，可以确定 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中实根的个数（不计重数）？这是在整个实系数多项式理论及应用上一个至关重要的基本问题。本节所证明的 Sturm 定理，提供了上述基本问题的完美解答。

若 $f(x)$ 含有重根，则其重根都含于 $f(x)$ 和 $Df(x)$ 的最高公因式 $d(x)$ 之中，而且 $\tilde{f}(x)=f(x)/d(x)$ 含有和 $f(x)$ 同样的根，但是不含重根。所以在研讨上述问题时不妨设 $f(x)$ 和 $Df(x)$ 互素。令 $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)=Df(x)$ 然後由 $f_0(x)$, $f_1(x)$ 的辗转相除，求得下述一串「余式」 $f_2(x),f_3(x),\cdots,f_k(x)$，即有

$$\begin{aligned}f_0(x)&=q_1(x)f_1(x)-f_2(x)\\ f_1(x)&=q_2(x)f_2(x)-f_3(x)\\ \vdots\;\;&\;\;\vdots\qquad\quad\vdots\\ f_{k-2}(x)&=q_{k-1}(x)f_{k-1}(x)-f_k(x)\end{aligned}$$

注意：上述除式中的余式带有负号，所以 $f_2(x),f_3(x),\cdots,f_k(x)$ 乃是通常的辗转相除中所得的余式再乘以 (-1)。再者由所设 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 互素，所以 $f_k(x)$ 其实是一个非零常数。

上述函数串 $\{f_0(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x)\}$ 叫做 Sturm 函数串。

【定理 9】（Sturm 定理）：$f(x)$ 在区间 (a,b) 之内的根的个数等于 $V(a)-V(b)$，其中 $V(a)$ 和 $V(b)$ 分别是下列数串

$$\{f_0(a),f_1(a),f_2(a),\cdots,f_k(a)\}\;\text{和}\;\{f_0(b),f_1(b),f_2(b),\cdots,f_k(b)\}$$

的变号数。

[注]：对于任给一数 c，不可能有相邻的 $f_i(c)$ 和 $f_{i+1}(c)$ 同时为 0。不然，则由上述除式即可逐步推导得 $f_j(c)=0,\ i\le j\le k$，但是 $f_k(x)$ 是一个非零常数！再者，设有 $f_i(c)=0$,

$0 < i < k$，则由除式可见 $f_{i-1}(c) = -f_{i+1}(c) \neq 0$。所以不论把 $f_i(c)$ 想成 $+$ 或 $-$，数串 $\{f_i(c), 0 \leq i \leq k\}$ 的变号数是一样的。由此可见在 c 不是 $f(x)$ 的一个根时，即使 $\{f_i(c)\}$ 中含有为零者 $V(c)$ 也是唯一确定的。

证明：若区间 $[c_1, c_2]$ 中不含有任何 $f_i(x)$ 的根 $0 \leq i \leq k$，则由中间值定理可知 $f_i(c_1)$ 和 $f_i(c_2)$, $0 \leq i \leq k$，每一对皆为同号。因此 $V(c_1)$ 当然和 $V(c_2)$ 相同。

(i) 设 c 是其中一个 $f_i(x)$, $0 < i < k$ 的根。则有 $f_{i-1}(c) = -f_{i+1}(c) \neq 0$ 是异号的。再者，在 $\delta > 0$ 取得足够小时，$f_{i-1}(c \pm \delta)$ 和 $f_{i-1}(c)$ 同号，$f_{i+1}(c \pm \delta)$ 和 $f_{i+1}(c)$ 同号，所以 $f_{i-1}(c \pm \delta)$ 和 $f_{i+1}(c \pm \delta)$ 异号，如下图表所示

	$c-\delta$	c	$c+\delta$
f_{i-1}	$\pm$	$\pm$	$\pm$
f_i	$+$ 或 $-$	0	$+$ 或 $-$
f_{i+1}	$\mp$	$\mp$	$\mp$

不论 $f_i(c \pm \delta)$ 的正、负，在 $\{f_{i-1}, f_i, f_{i+1}\}$ 这一段所含的变号数总是 1。

(ii) 设 c 是 $f_0(x) = f(x)$ 的一个根。则由无重根之所设 $f_1(c) = Df(c) \neq 0$，而且在 $\delta > 0$ 取得足够小时，$f_1(x)$ 在区间 $[c-\delta, c+\delta]$ 上保持其正、负不变，亦即 $f_0(x) = f(x)$ 在 $[c-\delta, c+\delta]$ 上保持其递增、递减性不变。由此可见，$\{f_0, f_1\}$ 在 $[c-\delta, c+\delta]$ 上的符号如下表所示：

	$c-\delta$	c	$c+\delta$
f_0	$\mp$	0	$\pm$
f_1	$\pm$	$\pm$	$\pm$

由上表可见 $\{f_0, f_1\}$ 这一段所含的变号数在 c 的左侧为 1 但是在 c 的右侧则是 0。

总结上面对于变号数的逐段局部分析如下：

设区间 $[a, b]$ 中 $f(x)$ 的根的个数为 k，它们把 $[a, b]$ 分割成 $(k+1)$ 个区间，在每一分段上变号数 V 保持不变，但是从 $f(x)$ 的一个根的左侧到其右侧，则变号数 V 减 1。这也就证明了

$$V(b) = V(a) - k$$

亦即

$$k = V(a) - V(b) \qquad \square$$

3.4 代数基本定理

在实数系的范围中，一个像 $x^2 + 1$ 这样简单的多项式已经是没有它的根了。当年把实数系扩充到复数系 $\mathbb{C} = \{x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ 至少使得所有二次方程式都有复数解，接著发现所有三次、四次方程式的根也都已经在复数范围之内。很自然会问，是否任何高次方程式的根也都在复数系之内呢？还是会有些高次方程式在复数系中依然无解呢？是耶非耶，这就是当年 Euler 和 Lagrange 他们想解答的一个代数学基本问题。其答案是任何高次复系数

多项式都存在有复数根，然後很容易用余式定理归纳地证明它的所有根都已经在复数系之中。这就是高斯 (Gauss) 在 1799 年于他的博士论文中所证明的代数基本定理。

这个定理有好几个不同的证法。下面所给者是一个比较初等而且证明中所涉的步骤又是十分简朴直观的证法。当 $f(z)$ 是一次多项式时，定理显然成立，所以我们设 $f(z)$ 的次数最少为 2。

令 $F(z) = |f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)}\,(\geq 0)$, $z = x + iy$。则 $F(z)$ 可以想成一个二元连续函数，亦即当 $a_n \to x_0$, $b_n \to y_0$（亦即 $a_n + ib_n \to x_0 + iy_0$）则恒有 $F(a_n + ib_n) \to F(x_0 + iy_0)$。

把 F 的变域限制到下述方块之上

$$\square(2K, 2K) = \{(x, y), |x| \leq K, |y| \leq K\}$$

我们将用实数系的连续性去证明 F 在 $\square(2K, 2K)$ 的函数值中有一个极小值，亦即存在 $\square(2K, 2K)$ 中一点 (x_0, y_0) 使得

$$F(x_0, y_0) \leq F(x, y), \quad (x, y) \in \square(2K, 2K)$$

恒成立。

[设想]：假如 $\square(2K, 2K)$ 业已大到包括我们所要证明其存在的 $f(z)$ 的一个根的话，则上述极小值必须是 0，而 $x_0 + iy_0$ 就是 $f(z)$ 的一个根。由此可见，代数基本定理证明的要点在于论证当 K 足够大时，上述极小值必须等于 0。

【引理 4】：F 在 $\square(2K, 2K)$ 上的所有函数值中，存在有一个极小值，亦即存在 $(x_0, y_0) \in \square(2K, 2K)$ 使得

$$F(x_0, y_0) \leq F(x, y)$$

对所有 $|x| \leq K$, $|y| \leq K$ 皆成立。

证明：令 $\mathcal{S}$ 为 F 在 $\square(2K, 2K)$ 上所取的所有函数值所成的集合。以 $g.l.b.(\mathcal{S})$ 表示 $\mathcal{S}$ 的极大下界。[注意]：一个具有下界的实数子集 $\mathcal{S}$ 总是有一个极大下界的（参看[引理 2]及[引理 3]），但是这个 $\mathcal{S}$ 的极大下界却不一定属于 $\mathcal{S}$；若属于 $\mathcal{S}$，则它当然就是 $\mathcal{S}$ 的极小者。

把 $\square(2K, 2K)$ 等分成四个 $\square(K, K)$（每个都包含其边界）。令 $\mathcal{S}_i$ 是函数 F 在各别方块上函数值的集合，$i = 1, 2, 3, 4$。因为 $\mathcal{S}$ 的极大下界等于 $\mathcal{S}_i$ 的极大下界之中的最小者，所以至少有一个 $\mathcal{S}_i$ 的极大下界等于 $\mathcal{S}$ 的极大下界。设其所相应的方块是 $\square_1$，我们又可以把 $\square_1$ 等分成四个方块而选取其中之一 $\square_2$，使得 F 在 $\square_2$ 上的函数值的极大下界等于 F 在 $\square(2K, 2K)$ 上的函数值极大下界。如此逐步四等分，而每次选择其中之一，使得 F 在其上函数值的极大下界依然和 F 在 $\square(2K, 2K)$ 上者相等，这样就得到「方块列」

$$\square(2K, 2K) \supset \square_1 \supset \square_2 \supset \cdots \supset \square_n \supset \square_{n+1} \supset \cdots$$

F 在 $\square_n$ 上的函数值的极大下界一直和 F 在 $\square(2K, 2K)$ 上者相等。再者，由上述逐次四等分然後选取其中之一这种几何构造法，可见有两对左、右夹逼实数数列 $\{a_n\} \to\leftarrow \{b_n\}$ 和 $\{c_n\} \to\leftarrow \{d_n\}$ 使得

$$\square_n = \{(x, y); a_n \leq x \leq b_n, c_n \leq y \leq d_n\}$$

在此，我们运用实数系的连续性即得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n \ \text{和} \ \lim_{n\to\infty} c_n = y_0 = \lim_{n\to\infty} d_n$$

然後，再用 F 的连续性去证明

$$F(x_0, y_0) = g.l.b.(\mathcal{S}) \tag{4}$$

所以 $F(x_0, y_0)$ 是 $\mathcal{S}$ 中的极小者。我们将用反证法来证明 (4)–式。假若不然，令

$$F(x_0, y_0) - g.l.b.(\mathcal{S}) = 2\varepsilon$$

则用 F 在 (x_0, y_0) 点的连续性，即有一个足够小的 $\delta > 0$，使得

$$|x - x_0| < \delta,\ |y - y_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |F(x, y) - F(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

再者，当 n 足够大时，即有

$$|a_n - x_0|,\ |b_n - x_0|,\ |c_n - y_0|,\ |d_n - y_0|$$

四者都小于 δ，亦即整个 $\square_n$ 都包含在

$$|x - x_0| < \delta \ \text{和} \ |y - y_0| < \delta$$

这个方块之内，所以 F 在 $\square_n$ 上的函数值都大于

$$F(x_0, y_0) - \varepsilon = g.l.b.(\mathcal{S}) + \varepsilon$$

这显然和 $\square_n$ 的选取是使得 F 在其上函数值的极大下界等于 $g.l.b.(\mathcal{S})$ 相矛盾。所以 $F(x_0, y_0)$ 必须等于 $g.l.b.(\mathcal{S})$，亦即 $F(x_0, y_0)$ 就是 F 在 $\square(2K, 2K)$ 上的<u>极小值</u>。 $\square$

<u>注意</u>：在上述证明中，其实仅仅用到 F 的连续性和 F 的下界性（即 $F \geq 0$）。

在代数基本定理的证明中，不妨设 $f(z)$ 的首项系数为 1。

【引理 5】：令 $f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n$ 及

$$M = \operatorname{Max}\{|c_i|,\ 1 \leq i \leq n\}, \quad K > 2(M+2)$$

则 $|f(z)|$ 的极小值不能够取值于 $\square(2K, 2K)$ 的边界之上。

<u>证明</u>：当我们把 z 限制在 $\square(2K, 2K)$ 的边界上时，

$$\begin{aligned} |f(z)| = |z|^n \cdot \left|1 + c_1 \frac{1}{z} + \cdots + c_n \frac{1}{z^n}\right| &\geq |z|^n \{1 - M(\frac{1}{|z|} + \cdots + \frac{1}{|z|^n})\} \\ &\geq K^n \{1 - \frac{M}{2M+3}\} \\ &\geq [2(M+2)]^n \cdot \frac{M+3}{2M+3} > |c_n| = |f(0)| \end{aligned}$$

由此可见 F 在 $\square(2K, 2K)$ 上的极小点 (x_0, y_0) 不可能位于其边界之上，亦即 (x_0, y_0) 必定是一个内点。 $\square$

【引理 6】：当 $|f(z)|$ 在 $\square(2K, 2K)$ 上的极小值发生于 $\square(2K, 2K)$ 的一个内点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 时，即有 $|f(z_0)| = 0$，亦即 $f(z_0) = 0$。

证明：我们将用反证法，设 $f(z_0) = w_0 \neq 0$ 然後去证明一定有 $\square(2K, 2K)$ 中的另外一点 z_1 使得 $|f(z_1)| < |f(z_0)|$。因为 z_0 是 $\square(2K, 2K)$ 的一个内点。所以以 z_0 为圆心的一个足够小半径的圆依然位于 $\square(2K, 2K)$ 之内。其上之点可以表成

$$z = z_0 + \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \rho \text{ 是半径}$$

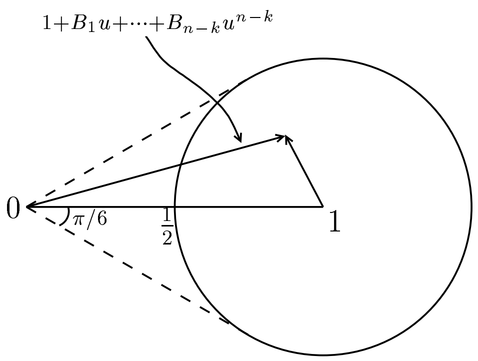
再者，以 $z = z_0 + u$ 代入 $f(z)$ 然後再以 u 的升幂表达，即有

$$f(z) = f(z_0) + A \cdot u^k \{1 + B_1 u + B_2 u^2 + \cdots + B_{n-k} u^{n-k}\}$$

令 $M' = \mathrm{Max}\,\{|B_i|, 1 \leq i \leq n-k\}$，取 $\rho < \dfrac{1}{2(M'+2)}$，则对所有 $u = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ 有

$$\left|B_1 u + B_2 u^2 + \cdots B_{n-k} u^{n-k}\right| \leq M' \cdot \{\rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{n-k}\} \leq \frac{M'}{2M'+3} < \frac{1}{2}$$

由 [图–12] 可见 $\{1 + B_1 u + \cdots + B_{n-k} u^{n-k}\}$ 的幅角 φ 必然介于 $\pm\dfrac{\pi}{6}$ 之间：



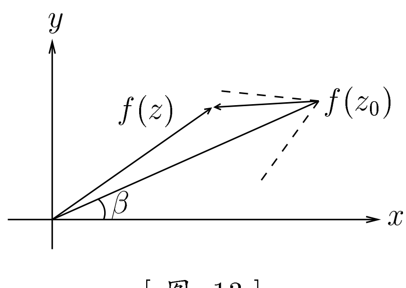
[图–12]

设 A 的幅角为 α，则

$$Au^k \cdot \{1 + B_1 u + \cdots + B_{n-k} u^{n-k}\}, \quad u = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

的幅角等于

$$\alpha + k\theta + \varphi, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{6}$$



[图–13]

设 $f(z_0)$ 的幅角为 β。取

$$\theta = \frac{\pi + \beta - \alpha}{k}$$

则有

$$\alpha + k\theta + \varphi = \pi + \beta + \varphi, \quad |\varphi| \le \frac{\pi}{6}$$

由 [图–13] 易见 $f(z) - f(z_0)$ 的方向必定夹在 $\pi + \beta \pm \frac{\pi}{6}$ 之间，所以 $|f(z)| < |f(z_0)|$，和所设 $|f(z_0)|$ 是极小者相矛盾。这也就证明了 $|f(z_0)|$ 必须是 0，亦即 z_0 乃是 $f(z)$ 的一个根！$\square$

【定理 10】（代数基本定理）：任何一个非常数复系数的多项式 $f(z)$ 都必定有一个零点，亦即存在 $z_0 \in \mathbb{C}$ 使得 $f(z_0) = 0$。

【推论 1】：任给一个 n 次复系数多项式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ 都可以分解成 n 个复系数一次因式之乘积。

【推论 2】：任给一个 n 次实系数多项式 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ 都可以分解成一次或二次实系数多项式的乘积。

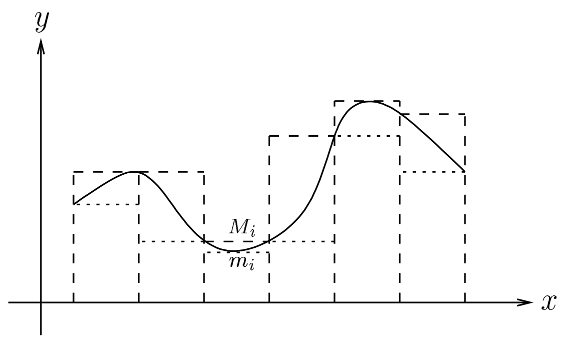
4　微积分基本定理与均值定理

【定理 11】：设 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上可积的。

证明：把 $[a,b]$ 等分为 2^n 个子区间。令 M_i, m_i 分别是 $f(x)$ 在第 i 个子区间 $[a_{i-1}, a_i]$ 上的极大、极小值。定义 $G_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 为分别在 $[a_{i-1}, a_i)$ 上取常数值 M_i 和 m_i 的阶梯函数，则有

$$g_n(x) \le g_{n+1}(x) \le \ldots \le f(x) \le \ldots \le G_{n+1}(x) \le G_n(x)$$

$$\int_a^b G_n(x)dx - \int_a^b g_n(x)dx = \frac{b-a}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} (M_i - m_i)$$



[图–14]

再者，设 $\varepsilon > 0$ 是一个任给正数。由 $f(x)$ 的均匀连续性得知存在一个足够小的 $\delta > 0$，使得

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

因此，只要把 n 取得足够大使得 $2^n > \frac{b-a}{\delta}$，则所有 $(M_i - m_i)$ 都小于 ε。亦即

$$\int_a^b G_n(x)dx - \int_a^b g_n(x)dx < \varepsilon \cdot (b-a)$$

所以 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上可积的，而 $\int_a^b f(x)dx$ 就是被左、右夹逼数列 $\{\int_a^b g_n(x)dx\}$ 和 $\{\int_a^b G_n(x)dx\}$ 所夹逼者也。 $\square$

【定理 12】（微积分基本定理）：设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数。令

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

则 $F'(x) = f(x)$。

证明：设 x_0 为 $[a,b]$ 中任取一点。令 $M(x_0,h)$ 和 $m(x_0,h)$ 分别是 $f(x)$ 在 $[x_0-h,x_0+h]$ 上的极大、极小值，其中 h 是一个足够小的正数（在 $x=a$ 或 b 的特殊情形，则上述邻域改用 $[a,a+h]$ 或 $[b-h,b]$）。则有

$$hm(x_0,h) \le \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \\ \displaystyle\int_{x_0-h}^{x_0} f(x)dx \end{array} \right\} \le hM(x_0,h)$$

亦即

$$m(x_0,h) \le \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{h}(F(x_0+h)-F(x_0)) \\ \dfrac{1}{-h}(F(x_0-h)-F(x_0)) \end{array} \right\} \le M(x_0,h)$$

再者，由 $f(x)$ 在 x_0 点的局部连续性，易见

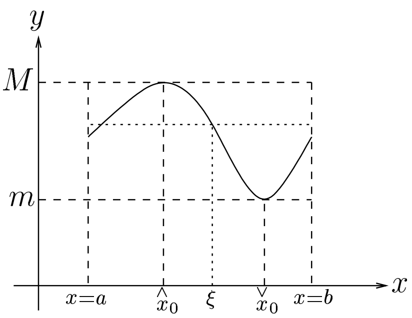
$$\lim_{h\to 0} m(x_0,h) = f(x_0) = \lim_{h\to 0} M(x_0,h)$$

所以 $F'(x_0) = f(x_0)$ 对于任给 $x_0 \in [a,b]$ 皆成立。 $\square$

【定理 13】（积分均值定理）：设 $f(x)$ 为在 $[a,b]$ 上连续者，则存在 a,b 之间的一点 ξ 使得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi)$$

证明：令 M, m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的极大、极小值。



[图–15]

如 [图–15] 所示，

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

亦即

$$(f(\overset{\vee}{x}_0) =)\ m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M\ (= f(\hat{x}_0))$$

再用中间值定理即得 $\overset{\vee}{x}_0$ 和 $\hat{x}_0$ 之间的一点 ξ 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad \square$$

设 $G(x)$ 是一个以 $f(x)$ 为其导函数者，则上述积分均值定理又可以改写成 $G(x)$ 的微分均值定理，即

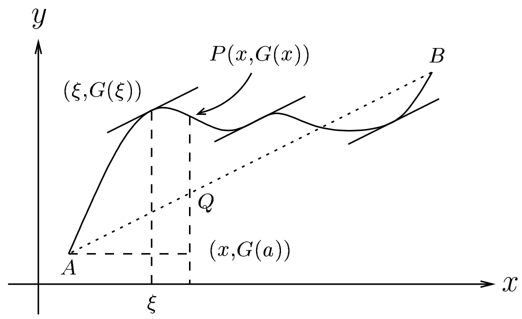
$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx = (b-a)G'(\xi)$$

亦即 $G(b) = G(a) + (b-a)G'(\xi)$。

在此，我们假设了 $G'(x) = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续性。有鉴于上述微分均值定理的基本重要性，我们在此再给以独立的证明，而且这样做的一个优点是它只需要 $G'(x)$ 在 (a,b) 中的每点皆能定义，从而摆脱了 $G'(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续这个较强的要求。

【定理 14】（微分均值定理）：设 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，而且 $G'(x)$ 在 (a,b) 中的每点皆能定义（亦即可微），则在 (a,b) 中存在一点 ξ 使得

$$G(b) = G(a) + (b-a)G'(\xi)$$



[图–16]

<u>证明</u>：如 [图–16] 所示，上述公式的几何意义乃是 $G(x)$ 的图象在 $(\xi, G(\xi))$ 点的切线和连结 $A(a, G(a))$ 和 $B(b, G(b))$ 两点的割线互相平行。从几何直观来看，不难想到那些使得 $\overrightarrow{QP}$ 极大或极小之点，其切线应该和 $\overline{AB}$ 平行。再者，不难看出

$$\overrightarrow{QP} = G(x) - G(a) - \frac{G(b)-G(a)}{b-a}(x-a)$$

令其为 $H(x)$，则有

$$H(a) = H(b) = 0$$

而且 $H(x)$ 也是在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 中每点皆为可微者。再者，除非 $H(x) \equiv 0$（亦即 $G'(x) \equiv \frac{G(b)-G(a)}{b-a}$），$H(x)$ 必然有其极大或极小值不等于 0。设其取非零的极值之点为 ξ，即有

$$H'(\xi) = G'(\xi) - \frac{G(b)-G(a)}{b-a} = 0$$

亦即

$$G(b) = G(a) + (b-a)G'(\xi) \qquad \square$$

【推论 1】：设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数而且 $f'(x) \equiv 0$，则 $f(x)$ 为一个常数函数。

<u>证明</u>：令 c 为 $(a,b]$ 中任何一点，则由微分均值定理知道存在一个 $\xi \in (a,x)$ 使得

$$f(c) = f(a) + (c-a)f'(\xi) = f(a)$$

由此可见 $f(x)$ 必为常数函数。 $\square$

【推论 2】：设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数而 $G'(x) = f(x)$，则

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

<u>证明</u>：由所设

$$\left[G(x) - \int_a^x f(t)dt\right]' = G'(x) - F'(x) \equiv 0$$

所以 $G(x) - \int_a^x f(t)dt$ 乃是一个常数函数，亦即存在一个常数 C 使得

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + C \quad \Rightarrow \quad C = G(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = G(b) - C = G(b) - G(a) \qquad \square$$

【推论 3】（部分积分公式）：设 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 都是在 $[a,b]$ 上连续者，则有

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

<u>证明</u>：$\int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx = \int_a^b [f(x)g(x)]'dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ $\square$

【定理 16】（高阶微分均值定理，亦即泰勒公式）：设 $f(x)$ 的 k–阶导函数 $f^{(k)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上到处连续，则存在一个介于 a,b 之间的 ξ，使得

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(a) + \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(\xi)$$

<u>证明</u>：由

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)dx$$

起始，逐次用部分积分公式，即有

$$\begin{aligned}
f(b) &= f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-x)f''(x)dx \\
&= f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(b-a)^2 f''(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x)dx \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(b-a)^2 f''(a) + \ldots \\
&\quad + \frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x)dx
\end{aligned}$$

令 M, m 分别是 $f^{(k)}$ 在 $[a,b]$ 上的极大值和极小值。由比较原则，即有

$$m\int_a^b \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}dx \le \int_a^b \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x)dx \le M\int_a^b \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}dx$$

亦即

$$m\frac{(b-a)^k}{k!} \le \int_a^b \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x)dx \le M\frac{(b-a)^k}{k!}$$

由上述不等式再用中间值定理，即得一个介于 a, b 之间的 ξ，使得

$$\int_a^b \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x)dx = \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(\xi)$$

□