

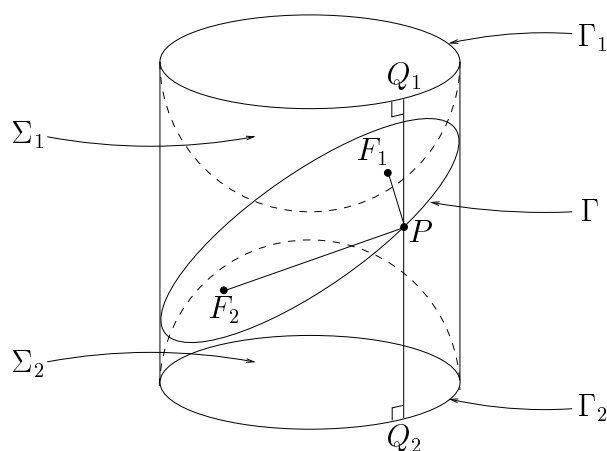
第五章：圆锥截线的故事

在现代的中学数学课程中，通常是在初等解析几何中学到圆锥截线，亦即椭圆、双曲线和抛物线。圆锥截线的发现和研究起始于古希腊。Euclid, Archimedes, Apollonius, Pappus 等几何学大师都热衷于圆锥截线的研究，而且都有专著论述其几何性质，其中以 Apollonius 所著的八册《圆锥截线论》集其大成，可以说是古希腊几何学一个登峰造极的精擘之作。当时对于这种既简朴又完美的曲线的研究，乃是纯粹从几何学的观点，研讨和圆密切相关的这种曲线；它们的几何乃是圆的几何的自然推广，在当年这是一种纯理念的探索，并不寄望也无从预期它们会真的在大自然的基本结构中扮演著重要的角色。此事一直到十六、十七世纪之交，Kepler 行星运行三定律的发现才知道行星绕太阳运行的轨道，乃是一种以太阳为其一焦点的椭圆。Kepler 三定律乃是近代科学开天劈地的重大突破，它不但开创了天文学的新纪元，而且也是牛顿万有引力定律的根源所在。由此可见，圆锥截线不单单是几何学家所爱好的精简事物，它们也是大自然的基本规律中所自然选用的精要之一。

在本章中将以圆锥截线的来龙去脉为中心课题，简明扼要地叙述这一段由古希腊几何学到牛顿天体力学引人入胜、发人深思的篇章。

1 圆柱截线和圆锥截线

常见的一段竹杆，大体上是一个圆柱。它的正切截线是一个圆，但是其斜切截线则不再是圆的，这也许就是「椭圆」的一种自然出处。圆的几何特性乃是它有一个圆心，和其上各点等距；自然会问这种由斜截圆柱所得的「椭圆」是否也具有类似的几何特性呢？古希腊几何学家在上述问题的探讨中获得令人鼓舞的简洁答案，亦即一个椭圆具有两个焦点 F_1, F_2 使得其上任给一点到两者的距离之和为一定长（其实，这也就是通常在初等解析几何中椭圆的定义），我们用 [图-1] 来解说当年对于这种圆柱截线的基本特性的证法。设 Γ 是一个半径为 R 的圆柱面和一个斜截平面 Π 的交集，我们可以用两个半径为 R 的球面 Σ_1, Σ_2 由上、下端，沿著柱面向截面 Π 滑动，一直到分别和 Π 相切于 F_1, F_2 的位置（如 [图-1] 所示）。



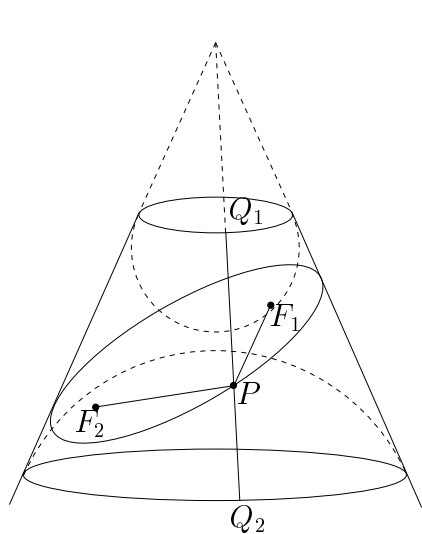
[图-1]

令 Γ_1, Γ_2 分别是上、下球面 Σ_1, Σ_2 和柱面相切的圆。设 P 是椭圆 Γ 上任给一点， $\overline{Q_1Q_2}$ 是柱面上过 P 点的那一条直线段， $Q_1 \in \Gamma_1, Q_2 \in \Gamma_2$ 。则有

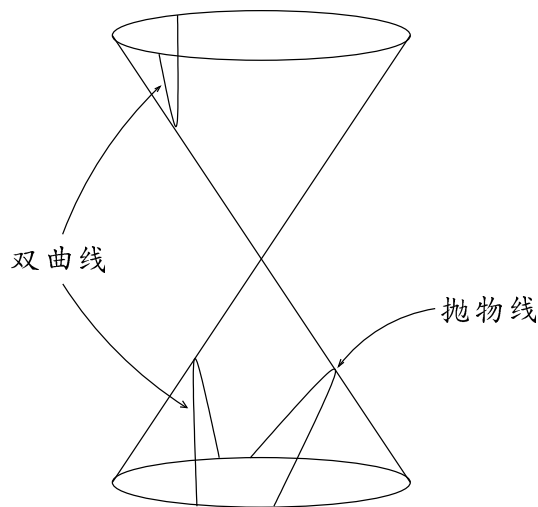
$$\begin{aligned}\overline{PF_1} &= \overline{PQ_1}, \quad \overline{PF_2} = \overline{PQ_2} \quad (\text{定点到一个球面的切线长相等}) \\ \overline{PF_1} + \overline{PF_2} &= \overline{Q_1Q_2} \quad (\text{定长})\end{aligned}$$

大体上，这也就是当年古希腊几何学家运用圆柱和球面的简朴特性所得出的「圆柱斜截线」的几何特性及其证明。这的确是一个令人鼓舞的杰作！

后来又发现上述简洁精辟的证明其实可以稍加推广，亦即把圆柱面更换成圆锥面依然成立，如 [图-2] 所示。



[图-2]

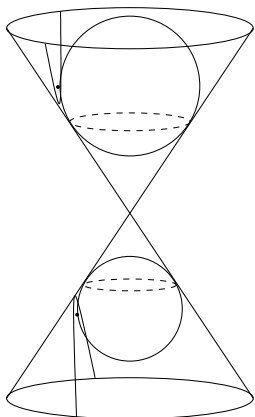


[图-3]

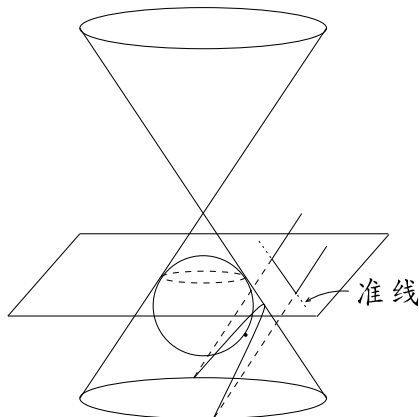
再者，如 [图-3] 所示，平面和圆锥面的交截还可以产生另外两种曲线，亦即现在叫做双曲线和抛物线者也。如 [图-4]、[图-5] 所示，双曲线也有两个焦点，而抛物线则只有一个焦点，而且也可以用类似的几何论证，证明双曲线和抛物线的几何特性分别如下，即：

双曲线： $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = \text{定值}$ ；

抛物线： $\overline{PF} = d(P, \ell)$ ，其中 ℓ 是准线。



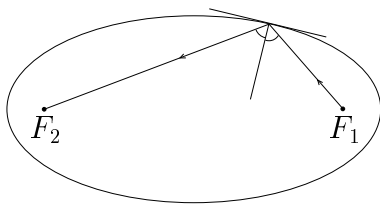
[图-4]



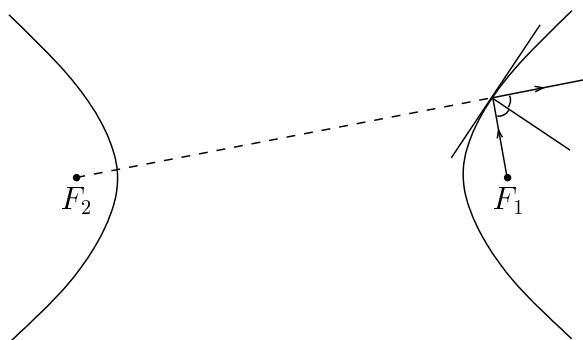
[图-5]

2 圆锥截线的光学性质

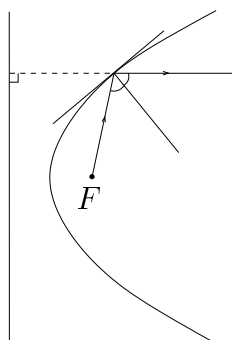
为什么把上面所说的特殊点 F_1, F_2 和抛物线的 F 叫做焦点呢？这种名称根源于椭圆、双曲线和抛物线的下述光学性质，即如 [图-6]、[图-7]、[图-8] 所示。



[图-6]

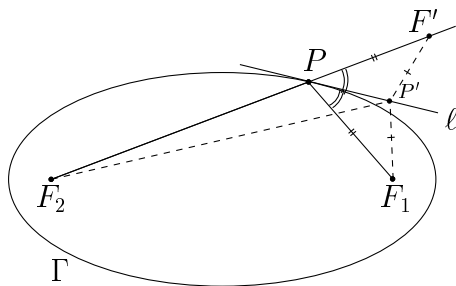


[图-7]



[图-8]

以上各点在 Apollonius 的论著中都有详细的几何证明。兹简述在椭圆情况的证明如下（其余两者的证明则留作习题）：令 P 为椭圆 Γ 上任意给定点。如 [图-6'] 所示，过 P 点作 F_2PF_1 外角的平分线 ℓ ：



[图-6']

则由反射对称性易证 ℓ 上其他点 $P' \neq P$ 皆在椭圆 Γ 之外，即

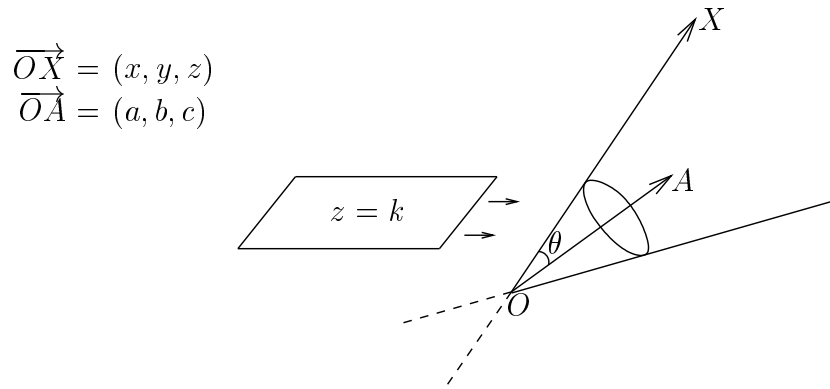
$$\overline{F_2P'} + \overline{P'F_1} > \overline{F_2P} + \overline{PF_1}$$

所以 ℓ 与 Γ 相切于 P 点，由此易证 F_1P, F_2P 两者和在 P 点的法线所成的角度必定相等。

3 圆锥截线和二次曲线

到了十七世纪，几何学的研究方法出现了革命性的突破，那就是笛卡儿 (Descartes)、费玛 (Fermat) 所创导的解析几何学。而这种新方法的牛刀小试就自然是把这种新引进的坐标

解析法用来研讨圆锥截线的几何，以期能够温故知新。首先，我们要来看一看一个圆锥截线的方程式究竟为何？



[图-9]

$$\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OX}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \cos \theta \quad (\text{圆锥的方程式})$$

亦即 $(ax + by + cz)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) \cos^2 \theta$.

由此可见上述圆锥和 $z = k$ 的交集的方程式就是：

$$(ax + by + ck)^2 = (x^2 + y^2 + k^2)(a^2 + b^2 + c^2) \cos^2 \theta$$

总之，上述直截了当的计算说明了任何一个圆锥截线的方程式都是一个二元二次方程式，其一般形式可以写成

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

概括地说，所有圆锥截线都是二次曲线。很自然地我们会反问，是否任何二次曲线也都是圆锥截线呢？

为了要解答上述逆问题，就自然地会认识到下面这种「坐标变换不变量」的基本思想。

4 坐标变换和不变量

空间的一个重要本质是它完美的对称性和均匀性，它在坐标解析几何中的反映就是所有正交坐标系（亦称之为笛卡儿坐标系）之间的互换等价性。当我们用坐标解析法去研讨几何事物时，一定要铭记在心，只有那种和坐标系的选取无关者才具有本质的几何内涵。例如当我们在研讨二次曲线时，同一条二次曲线在两个不同的正交坐标系 $\{O; x, y\}$ 和 $\{O'; x', y'\}$ 中的方程式各异。设其分别为

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

和

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

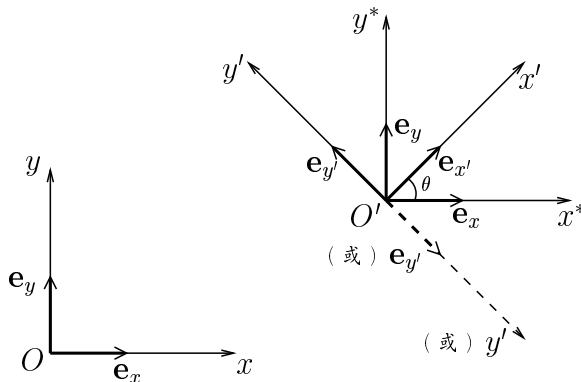
所以上述两个方程式的系数比例组即 $\{A : B : C : D : E : F\}$ 和 $\{A' : B' : C' : D' : E' : F'\}$ 其本身并不具有本质的几何意义，而只有在坐标变换之下保持不变的那种系数组合才会具有

本质性的几何意义。由此可见，要研讨一般二次曲线的几何就自然得从其方程式系数的不变组合（通常叫做方程式的坐标变换不变量）的系统研讨著手。长话短说，二次方程式在正交变换和平移变换之下具有下述三个基本不变量，即恒有：

$$\begin{aligned} A + C &= A' + C' \\ B^2 - AC &= B'^2 - A'C' \\ \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

通常分别用符号 H, δ, Δ 表示上述三个基本不变量。再者，所有其他的不变量都可以表达成上述三个基本不变量 $\{H, \delta, \Delta\}$ 的函数。在此且先说明 H, δ 和 Δ 在坐标变换之下的不变性：

1. 平面上的任给保长变换都可以由平移和正交（转轴）变换组合而成。相应地，平面上任给两个正交坐标系 $\{O; x, y\}$ 和 $\{O'; x', y'\}$ 之间的坐标变换也可以分解成平移和正交坐标变换的组合，如 [图-10] 所示。



[图-10]

2. 设 P 是平面上任给一点，它在坐标系 $\{O; x, y\}$, $\{O'; x^*, y^*\}$ 和 $\{O'; x', y'\}$ 中的坐标分别为 (x, y) , (x^*, y^*) 和 (x', y') ，即有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y \\ \overrightarrow{O'P} &= x^*\mathbf{e}_x + y^*\mathbf{e}_y = x'\mathbf{e}_{x'} + y'\mathbf{e}_{y'} \end{aligned}$$

设 $\overrightarrow{OO'} = h\mathbf{e}_x + k\mathbf{e}_y$, $\angle \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_{x'} = \theta$, $\angle \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_{y'} = \theta$ (或 $\pi + \theta$)，则有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = (h + x^*)\mathbf{e}_x + (k + y^*)\mathbf{e}_y \\ \Rightarrow \quad x &= x^* + h, \quad y = y^* + k \\ \begin{cases} \mathbf{e}_{x'} = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_{y'} = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y \end{cases} & \quad (\text{或 } \sin \theta \mathbf{e}_x - \cos \theta \mathbf{e}_y) \\ \Rightarrow \quad \begin{cases} x^* = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y^* = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \\ \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta + h \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta + k \end{cases} \end{aligned}$$

3. 将上式代入一个二次曲线在 $\{O; x, y\}$ 中的方程式

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

展开，集项而得者乃是它在 $\{O'; x', y'\}$ 中的方程式。由此，比较系数即得

$$\begin{cases} A' = A \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta + B \sin 2\theta \\ B' = (C - A) \sin \theta \cos \theta + B \cos 2\theta \\ C' = A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta - B \sin 2\theta \\ D' = (Ah + Bk + D) \cos \theta + (Bh + Ck + E) \sin \theta \\ E' = (Bh + Ck + E) \cos \theta - (Ah + Bk + D) \sin \theta \\ F' = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 + 2Dh + 2Ek + F \end{cases}$$

4. 由上述二次曲线的系数的坐标变换式，即可直接验证 H 和 δ 的不变性如下，即：

$$A' + C' = A(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + C(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = A + C$$

而用直接展开可得

$$\begin{aligned} B'^2 &= (C - A)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \underline{B(C - A) \cos 2\theta \sin 2\theta} + B^2 \cos^2 2\theta \\ -A'C' &= -A^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - AC \cos^4 \theta + \underline{AB \cos^2 \theta \sin 2\theta} \\ &\quad - AC \sin^4 \theta - C^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \underline{BC \sin^2 \theta \sin 2\theta} \\ &\quad - \underline{AB \sin^2 \theta \sin 2\theta} - \underline{BC \sin 2\theta \cos^2 \theta} + B^2 \sin^2 2\theta \end{aligned}$$

在上式中， $B^2 \cos^2 2\theta$ 和 $B^2 \sin^2 2\theta$ 合起来当然就是 B^2 ，而 B'^2 中有底线的项又刚好和 $-A'C'$ 中有底线的项相消，所以即得

$$\begin{aligned} B'^2 - A'C' &= B^2 + (C^2 - 2AC + A^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta - A^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &\quad - C^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - AC(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ &= B^2 - AC(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \\ &= B^2 - AC(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 = B^2 - AC \end{aligned}$$

5. 我们当然可以用同样的直接代换方法来验证 Δ 的不变性，但是其中的运算颇为繁复。下面将提供有一个较佳的方法，而且亦可以展现出矩阵运算的优越性。一个二次曲线可以用下述矩阵形式表达：

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

另一方面，前述的坐标变换式在矩阵形式下亦可以写成

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & h \\ \sin \theta & \cos \theta & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ h & k & 1 \end{pmatrix}$$

所以由直接代换可得

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & h \\ \sin \theta & \cos \theta & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

亦即

$$\begin{pmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & h \\ \sin \theta & \cos \theta & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由此可见，用行列式的乘法公式即有

$$\begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ h & k & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & h \\ \sin \theta & \cos \theta & k \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

将上述基本不变量的理解再和坐标变换结合运用，就可以有系统地把二次曲线加以几何分类。例如当 $\delta \neq 0$ 的情形，即可求得一个平移变换：

$$\begin{cases} x = x^* + h \\ y = y^* + k \end{cases}$$

使得 $D^* = E^* = 0$ ，亦即由下述线性方程组

$$\begin{cases} Ah + Bk + D = 0 \\ Bh + Ck + E = 0 \end{cases}$$

即可求得上述平移中的 $\{h, k\}$ 。这样，原给曲线在坐标系 $\{O'; x^*, y^*\}$ 中的方程式就变为（注意：平移变换不会改变 A, B, C 的值）

$$Ax^{*2} + 2Bx^*y^* + Cy^{*2} + F^* = 0$$

其中 $F^* = -\frac{\Delta}{\delta}$ 。接著我们还可以用适当的转轴变换，即

$$\begin{cases} x^* = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y^* = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

使得 $B' = (C - A) \sin \theta \cos \theta + B \cos 2\theta = 0$ ，亦即

$$\tan 2\theta = \frac{2B}{A - C} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2B}{A - C}$$

(若取 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4} \leq \theta < \pi$ 者, 则可以保持 $A' - C'$ 和 $A - C$ 同号, 试证之。) 则曲线在坐标系 $\{O'; x', y'\}$ 中的方程式为

$$A'x'^2 + C'y'^2 + F' = 0, \quad (F' = F^* = -\frac{\Delta}{\delta})$$

而上述 $\{A', C'\}$ 是可以由方程组

$$\begin{cases} A' + C' = H = (A + C) \\ A'C' = -\delta = AC - B^2 \end{cases}$$

直接求得, 亦即 $\{A', C'\} = \{\frac{H}{2} \pm \sqrt{(\frac{H}{2})^2 + \delta}\}$ 。

[注]: 若一条二次曲线在变换 $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ 之下保持不变, 则称之为具有「心对称」者。把这个变换代入二次曲线的方程式中, 即有

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 - 2Dx' - 2Ey' + F = 0$$

由此可见一条二次曲线具有心对称的充要条件就是 $D = E = 0$ 。当 $\delta \neq 0$ 时, 我们可以求得平移变换使得 $D^* = E^* = 0$, 所以在这个情况二次曲线是具有心对称者; 但若果 $\delta = 0$, 则情况会是怎样? 我们可以用下面的分析来研讨:

设 $\delta = 0$, 我们可以先用一个转轴变换

$$\begin{cases} x = x^* \cos \theta - y^* \sin \theta \\ y = x^* \sin \theta + y^* \cos \theta \end{cases}$$

使得 $B^* = 0$ 。因为 $0 = \delta = B^{*2} - A^*C^* = -A^*C^*$, 所以 A^* 和 C^* 之中必有一个为零, 不妨由 θ 的适当选取 (即使得 $A - C, A^* - C^*$ 同号或异号的 θ) 使得 $C^* = 0$ 。所以经过上述转轴变换之后, 二次曲线在坐标系 $\{O; x^*, y^*\}$ 的方程式为

$$A^*x^{*2} + 2D^*x^* + 2E^*y^* + F^* = 0$$

再用一个平移变换 $x^* = x' - \frac{D^*}{A^*}, y^* = y'$ 即有

$$A'x'^2 + 2E'y' + F' = 0, \quad (A' = A^*, E' = E^*)$$

上式中的 $\{A', E'\}$ 可以用不变量求得: $H = A', \Delta = -A'E'^2$, 即 $E' = \pm \sqrt{-\frac{\Delta}{H}}$ 。当 $E' \neq 0$, 亦即 $\Delta \neq 0$ 时, 这是一条抛物线, 而且还可以用平移变换 $x' = x'', y' = y'' - \frac{F'}{2E'}$ 将方程式简化为 $A'x''^2 + 2E'y'' = 0$ 。当 $E' = 0$, 亦即 $\Delta = 0$ 时, 则二次曲线会蜕化至一对直线 (实或虚) 的情形。

总结上述分析, 我们可以用不变量 H, δ, Δ 把一般的二次曲线作系统分类如下:

第一种 $\delta \neq 0$: 在这种情形, 二次曲线的方程式经过适当的平移、转轴变换后就可以写成

$$A'x'^2 + C'y'^2 + F' = 0, \quad (F' = F^* = -\frac{\Delta}{\delta})$$

- (1) 若 A', C' 同号 (即 $\delta = -A'C' < 0$) 而且与 F' 异号 (即 $H \cdot \Delta < 0$) , 则属于椭圆的类别 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
- (2) 若 A', C', F' 同号 (即 $\delta < 0, H \cdot \Delta > 0$) , 则属于虚椭圆的类别 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$;
- (3) 若 A', C' 同号 (即 $\delta < 0$) 而且 $F' = 0$ (即 $\Delta = 0$) , 则二次曲线会蜕化为一点 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ (或可当做交于一实点的一对虚直线) ;
- (4) 若 A', C' 异号 (即 $\delta > 0$) 而且 $F' \neq 0$ (即 $\Delta \neq 0$) , 则属于双曲线的类别 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$;
- (5) 若 A', C' 异号 (即 $\delta > 0$) 而且 $F' = 0$ (即 $\Delta = 0$) , 则属于一对相交直线的类别 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$;

第二种 $\delta = 0$: 在这种情形, 二次曲线的方程式经过适当的转轴、平移变换後就可以写成

$$A'x'^2 + 2E'y' + F' = 0$$

- (6) 若 $E' \neq 0$ (即 $\Delta = -A'E'^2 \neq 0$) , 则属于抛物线的类别 $y = ax^2$;
- (7) 若 $E' = 0$ (即 $\Delta = 0$) , 则属于一对 (平行, 相重或虚) 直线的类别 $x^2 = a^2, x^2 = 0$ 或 $x^2 = -a^2$ 。

[注] : 由上述分类可以直接看到, 一条二次曲线会蜕化为一对 (平行, 相重, 相交或虚) 直线的充要条件就是 $\Delta = 0$ 。

5 五点定一「二次曲线」和六点共在一「二次曲线」的条件

在初等几何中有两个熟知的事实, 即两点定一直线和不共线三点定一圆。若改用解析观点来看, 上述几何事实与直线和圆的方程式中系数比的个数是密切相对应的。亦即

$$\text{直线方程: } Ax + By + C = 0$$

中具有两个相互独立的系数比 $\{A:B, A:C\}$;

$$\text{圆方程: } A(x^2 + y^2) + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

中具有三个相互独立的系数比 $\{A:D, A:E, A:F\}$ 。再者, 运用线性方程组的基础理论, 我们还可以用行列式直接写下三点共线和四点共圆的坐标条件式, 即

$P_i(x_i, y_i), 1 \leq i \leq 3$, 三点共线的条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$P_i(x_i, y_i), 1 \leq i \leq 4$, 四点共圆的条件是

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

同样理由，我们也有下述六点 $\{P_i(x_i, y_i), 1 \leq i \leq 6\}$ 共在一个二次曲线上的代数条件是

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \\ x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 & x_6 & y_6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

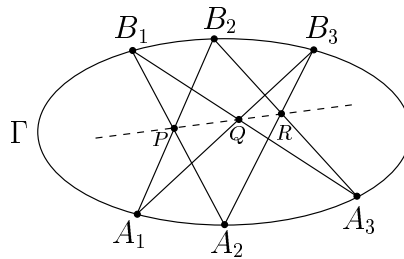
因为它就是存在有不全为零的系数组 $\{A, B, C, D, E, F\}$ 使得

$$Ax_i^2 + Bx_i y_i + Cy_i^2 + Dx_i + Ey_i + F = 0, \quad 1 \leq i \leq 6$$

的充要条件。假如我们把 $\{(x_i, y_i), 1 \leq i \leq 5\}$ 想成是取定者，而把 (x_6, y_6) 想成是变动者，而且改用符号 (x, y) ，则上述六阶行列式也就是过 $\{P_i(x_i, y_i), 1 \leq i \leq 5\}$ 这五点的唯一二次曲线的方程式。这也就是「五点定一二次曲线」的代数表述。

6 Pascal 定理和 Pappus 定理

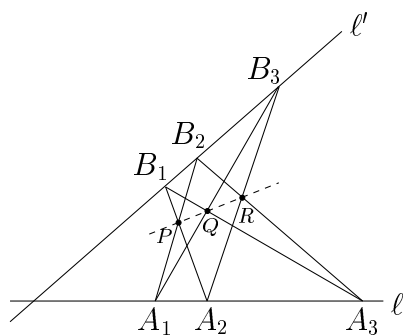
上面所讨论的是六点共在一二次曲线上的坐标代数条件式。很自然地我们还应该研讨六点共在一二次曲线的几何条件究竟是什麼？这也就是著名的 Pascal 定理。Blaise Pascal (1623-1662) 英年早逝，他在少年时代曾著有一本圆锥截线的小册子，可惜当年印份极少，很早就连孤本也找不到了。但是 Leibniz 说他早年曾经拜读过，还记得其中有下述这个美妙的定理，即在一个圆锥截线 Γ 上任取六点 $\{A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3\}$ ，如 [图-11] 所示，令 $P = A_1 B_2 \cap A_2 B_1$, $Q = A_1 B_3 \cap A_3 B_1$, $R = A_2 B_3 \cap A_3 B_2$ ，则恒有 $\{P, Q, R\}$ 三点共线。



[图-11]

但是 Leibniz 说他已经不记得 Pascal 在书中所给的证明了，所以我们现在只能从 Pascal 当代的几何认知环境来作一种合情合理的探讨与推测。

早在纪元三世纪末，Pappus 的几何著作中即已出现下述命题，即如 [图-12] 所示，设 $\{A_1, A_2, A_3\}, \{B_1, B_2, B_3\}$ 是分别在 ℓ 和 ℓ' 上的三点组。令 $P = A_1 B_2 \cap A_2 B_1$, $Q = A_1 B_3 \cap A_3 B_1$, $R = A_2 B_3 \cap A_3 B_2$ ，则 $\{P, Q, R\}$ 三点共线。



[图-12]

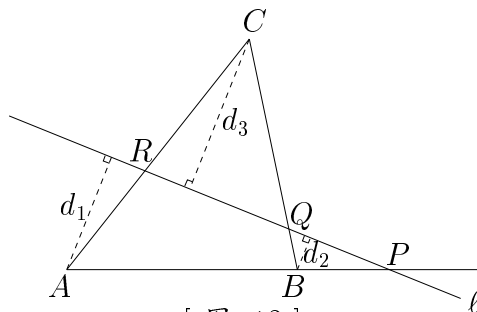
可惜这样美妙的命题乃是仅仅以一个习题形式出现而并没有在书中给以论证，显然 Pappus 和当代的几何学家们是知道如何证明上述命题的。他们当时究竟是怎样证的呢？却又是一个有待探讨与推测的「证法考古题」。

现在让我们先来探讨 Pappus 定理的古证理当如何。由于这个命题是以习题形式出现，我们相信它是能够以当年熟知的几何定理推导出来的。回顾当年有关的几何定理，其中就只有 Menelous 逆定理是以「三点共线」为其结论者，所以我们可以想到当年大概是要运用 Menelous 逆定理来证明 Pappus 定理。我们先重温 Menelous 定理和其逆定理：

【Menelous 定理和逆定理】：设直线 ℓ 与 $\triangle ABC$ 三边所在之直线 AB, BC, CA 分别相交于 P, Q, R 相异三点，则下述有向长度比之乘积恒等于 -1 ：

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} \equiv -1$$

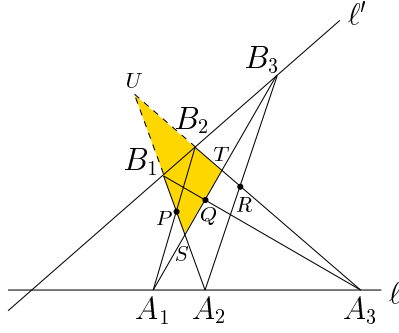
反之，若相异三点 P, Q, R 分别在 $\triangle ABC$ 三边 AB, BC, CA 之上并满足上面有向长度比的条件式，则 P, Q, R 三点共线。



[图-13]

现在让我们运用 Menelous 定理和逆定理来证明 Pappus 定理。

就命题的图形所给的八条直线，我们可以就地取材，选取其中三条分别过 P, Q, R 者来构成一个三角形，然后再对于其余五条直线运用 Menelous 定理。如 [图-14] 所示，我们选取了 A_1B_3, A_2B_1, A_3B_2 来构成 $\triangle STU$ 。



[图-14]

对 A_1B_2 运用 Menelous 定理 :

因 $ST \cap A_1B_2 = \{A_1\}$, $TU \cap A_1B_2 = \{B_2\}$, $US \cap A_1B_2 = \{P\}$, 所以 :

$$\frac{\overrightarrow{SA_1}}{\overrightarrow{A_1T}} \cdot \frac{\overrightarrow{TB_2}}{\overrightarrow{B_2U}} \cdot \frac{\overrightarrow{UP}}{\overrightarrow{PS}} = -1$$

对 A_2B_3 运用 Menelous 定理 :

因 $ST \cap A_2B_3 = \{B_3\}$, $TU \cap A_2B_3 = \{R\}$, $US \cap A_2B_3 = \{A_2\}$, 所以 :

$$\frac{\overrightarrow{SB_3}}{\overrightarrow{B_3T}} \cdot \frac{\overrightarrow{TR}}{\overrightarrow{RU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UA_2}}{\overrightarrow{A_2S}} = -1$$

对 A_3B_1 运用 Menelous 定理 :

因 $ST \cap A_3B_1 = \{Q\}$, $TU \cap A_3B_1 = \{A_3\}$, $US \cap A_3B_1 = \{B_1\}$, 所以 :

$$\frac{\overrightarrow{SQ}}{\overrightarrow{QT}} \cdot \frac{\overrightarrow{TA_3}}{\overrightarrow{A_3U}} \cdot \frac{\overrightarrow{UB_1}}{\overrightarrow{B_1S}} = -1$$

对 ℓ 运用 Menelous 定理 (然後颠倒) :

因 $ST \cap \ell = \{A_1\}$, $TU \cap \ell = \{A_3\}$, $US \cap \ell = \{A_2\}$, 所以 :

$$\frac{\overrightarrow{A_1T}}{\overrightarrow{SA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{A_3U}}{\overrightarrow{TA_3}} \cdot \frac{\overrightarrow{A_2S}}{\overrightarrow{UA_2}} = -1$$

对 ℓ' 运用 Menelous 定理 (然後颠倒) :

因 $ST \cap \ell' = \{B_3\}$, $TU \cap \ell' = \{B_2\}$, $US \cap \ell' = \{B_1\}$, 所以 :

$$\frac{\overrightarrow{B_3T}}{\overrightarrow{SB_3}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_2U}}{\overrightarrow{TB_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1S}}{\overrightarrow{UB_1}} = -1$$

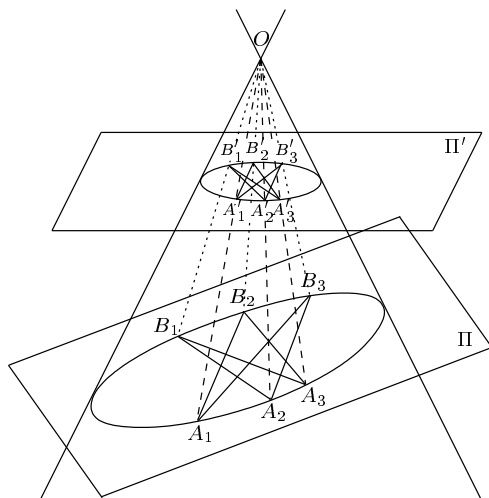
现将上面所得的五条等式相乘起来, 便会发现有很多项能够互相抵消, 最後便可得出下面等式 :

$$\frac{\overrightarrow{SQ}}{\overrightarrow{QT}} \cdot \frac{\overrightarrow{TR}}{\overrightarrow{RU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UP}}{\overrightarrow{PS}} = -1$$

运用 Menelous 逆定理, 即知 P, Q, R 三点共线, Pappus 定理证毕。

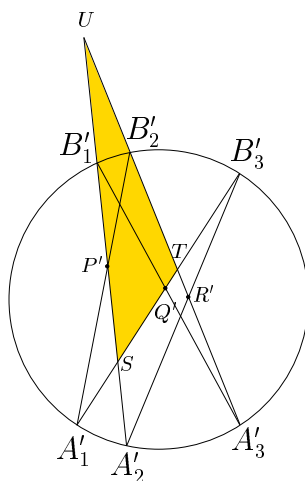
接著让我们来探讨 Pascal 当年的证明究竟有那种合情合理的可能性。首先, 他当然熟知 Pappus 定理, 而且也知道对于 Pappus 定理的上述证法。再者, 他所要证明者, 其实就是

Pappus 定理在非蜕化锥线的推广。如 [图-15] 所示， Σ, Σ' 分别是圆锥 Γ 和两个平面 Π, Π' 的截线，而且 Σ' 是一个圆。令 $\{A'_1, A'_2, A'_3; B'_1, B'_2, B'_3\}$ 是 Σ' 上的相应六点使得 $\{O, A_i, A'_i\}$ 和 $\{O, B_i, B'_i\}$ 皆为共线三点组。



[图-15]

令 $P' = A'_1 B'_2 \cap A'_2 B'_1$, $Q' = A'_1 B'_3 \cap A'_3 B'_1$, $R' = A'_2 B'_3 \cap A'_3 B'_2$ 。不难看出 $\{O, P, P'\}$, $\{O, Q, Q'\}$, $\{O, R, R'\}$ 也都是共线三点组。所以 $\{P', Q', R'\}$ 三点共线的充要条件乃是 $\{P, Q, R\}$ 三点共线。由此可以想到，Pascal 当年想要证明者，其实可以归于圆的情形去加以证明的。换句话说，只要能够把它对圆的特殊情形加以证明，则一般情形的证明就可以运用上述透视对应加以推论而得！按照 Pascal 当代的几何认知来判断，上面这种运用圆锥截线「与生俱来」的透视对应把 Pascal 定理的证明归于圆的情形加以论证的想法是相当自然的。总之，只要有了这个想法，就自然会同样地去构造在 Pappus 定理的古证中那个分别含有 P', Q', R' 于其三边之上的那个三角形，如 [图-16] 所示的 $\triangle STU$ 。



[图-16]

把 Pappus 定理中所用的 [图-16] 和 [图-14] 相比较，其差别是前者除 $\triangle STU$ 的三边之外尚有五条直线而後者则尚有三条直线和一个圆。我们当然可以先对这三条直线运用 Menelous

定理，即得

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{SA'_1}}{\overrightarrow{A'_1T}} \cdot \frac{\overrightarrow{TB'_2}}{\overrightarrow{B'_2U}} \cdot \frac{\overrightarrow{UP'}}{\overrightarrow{P'S}} &= -1 \\ \frac{\overrightarrow{SB'_3}}{\overrightarrow{B'_3T}} \cdot \frac{\overrightarrow{TR'}}{\overrightarrow{R'U}} \cdot \frac{\overrightarrow{UA'_2}}{\overrightarrow{A'_2S}} &= -1 \\ \frac{\overrightarrow{SQ'}}{\overrightarrow{Q'T}} \cdot \frac{\overrightarrow{TA'_3}}{\overrightarrow{A'_3U}} \cdot \frac{\overrightarrow{UB'_1}}{\overrightarrow{B'_1S}} &= -1\end{aligned}$$

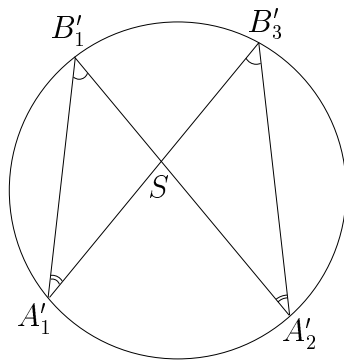
相乘之後再重组，其所得为

$$\frac{\overrightarrow{SA'_1}}{\overrightarrow{A'_2S}} \cdot \frac{\overrightarrow{SB'_3}}{\overrightarrow{B'_1S}} \cdot \frac{\overrightarrow{TB'_2}}{\overrightarrow{B'_3T}} \cdot \frac{\overrightarrow{TA'_3}}{\overrightarrow{A'_1T}} \cdot \frac{\overrightarrow{UA'_2}}{\overrightarrow{B'_2U}} \cdot \frac{\overrightarrow{UB'_1}}{\overrightarrow{A'_3U}} \cdot \frac{\overrightarrow{SQ'}}{\overrightarrow{Q'T}} \cdot \frac{\overrightarrow{TR'}}{\overrightarrow{R'U}} \cdot \frac{\overrightarrow{UP'}}{\overrightarrow{P'S}} = -1$$

把上式和 Menelous 逆定理中的条件相比，上式左侧多了一个

$$\frac{\overrightarrow{SA'_1}}{\overrightarrow{A'_2S}} \cdot \frac{\overrightarrow{SB'_3}}{\overrightarrow{B'_1S}} \cdot \frac{\overrightarrow{TB'_2}}{\overrightarrow{B'_3T}} \cdot \frac{\overrightarrow{TA'_3}}{\overrightarrow{A'_1T}} \cdot \frac{\overrightarrow{UA'_2}}{\overrightarrow{B'_2U}} \cdot \frac{\overrightarrow{UB'_1}}{\overrightarrow{A'_3U}}$$

在此，自然会想到应该运用圆的几何性质去证明它恒等于 1。其实，如 [图-17] 所示，由圆周角相等易见



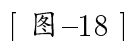
[图-17]

$\triangle SA'_1B'_1$ 和 $\triangle SA'_2B'_3$ 相似，所以 $\frac{\overrightarrow{SA'_1}}{\overrightarrow{A'_2S}} \cdot \frac{\overrightarrow{SB'_3}}{\overrightarrow{B'_1S}} = 1$ 。同理即得

$$\frac{\overrightarrow{TB'_2}}{\overrightarrow{B'_3T}} \cdot \frac{\overrightarrow{TA'_3}}{\overrightarrow{A'_1T}} = 1, \quad \frac{\overrightarrow{UA'_2}}{\overrightarrow{B'_2U}} \cdot \frac{\overrightarrow{UB'_1}}{\overrightarrow{A'_3U}} = 1$$

这样就可以证得 P', Q', R' 三点共线，再用透视对应即可证得 P, Q, R 三点也共线。由上面这一段分析和探讨来看，我们相信 Pascal 当年的证法，大致应该如此。

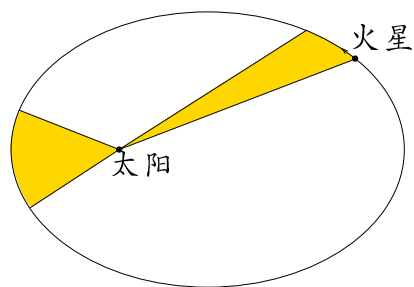
[注]：（一）Pascal 定理不但提供了六点共在一锥线的充要条件的几何表述，而且也提供了描绘那个五点所定的锥线的点线作图法。



(三) Pappus 定理当年在 Pappus 的著作中，仅仅以习题形式出现，究其原因，大概是当代的几何学家们认为它只是一个美妙的命题而已；它在「当时」的几何体系中，并没有基本的重要性。其实 Pappus 定理的深刻蕴涵，一直到了十九世纪後半在射影几何学的研讨中，才展现出它的基本重要性。它乃是整个射影几何的基本定理。

日月和四季的变化，具有明确的周期性和规律性；而且它们都全面地影响著大地上的一切现象和活动。所以自古以来各古文明都十分重视天象的观察也都认识到各种各样的天文知识。例如中国、埃及、巴比伦、希腊等古文明都发现漫天斗星之中，几乎所有的星象之间的相对位置都是固定不动，可以把它们想象成固定在一个旋转不休的「天球」上的「恒星」。唯独有很少几颗相当明亮的星星，它们和其他星星的相对位置则是一直在变动，乃是在天球上不停游走的「行星」(planets：其意义是漫游者)。这几颗特出的行星，自古以来就吸引著世代代的星象观察者。在古代的天文学中，观察和研讨日、月、行星在天空中运行的规律一直是最主要的中心课题。此事一直到十六、十七世纪之交，Kepler 行星三定律的发现才克竟其功，这也就是开创近代天文学的重大突破和奠基者。长话短说，Kepler 三定律乃是以 Tyco de Brahe 数十年对于行星运行夜以继夜，从不间断的详尽、致细的观察数据为基础。Kepler 再花了十多年功夫，用各种各样几何模型的数理分析去探索那个能够和 Tyco de Brahe 的观察数据充分吻合的行星运行模式。其间历尽艰辛，屡败不馁才在 1609 年终于完成了火星 (Mars) 的运行模式，这也就是他在《新天文学》(Astronomia Nova, 1609) 中所发表的第一与第二定律，即：

【第二定律】：在单位时间内，火星和太阳连线所扫过的面积恒相等，如 [图-19] 所示。

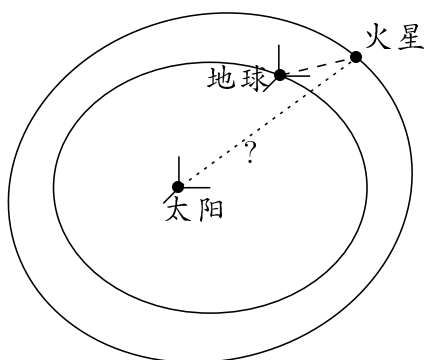


[图-19]

他接著又花了十年苦功去研究其他各行星的运行规律，它们不但也满足同样的第一、第二定律，而且在当年所知的六个行星（包括地球）的椭圆轨道的长径和其周期之间还满足下述美妙的第三定律，发表在《宇宙的和諧》(Harmonices Mundi, 1619)：

【第三定律】：各个行星不但也满足同样的第一、第二定律，而且其轨道长径的立方和周期的平方之间的比值皆相等。

首先，让我们以後见之明，再来回顧、分析一下当年 Kepler 在发现行星三定律所经历的艰难苦功究竟是那一种数理分析？此事的细节说来话长，而 Kepler 所发表的《新天文学》其实乃是一本把他当年所经历的困难、失败与成功的实况实录，在此只简要地概述其中主要的困难所在。以後见之明来看，地球和火星都绕著太阳作椭圆的非等速运动，大约如 [图-20] 所示。



[图-20]

要注意，当年 Tycho de Brahe 以及自古以来所有的观察数据都是由地球向火星夜以继夜的观察，而 Kepler 所要探索的运行规律则是火星和地球究竟是如何绕太阳作相对运动。因此他先得要作出一种猜想，然後根据它来计算在各个时刻地球和火星之间的方向，并且把计算所得和 Tycho de Brahe 的实测方向逐一比较，看看是否逐一吻合？（亦即偏差在观察误差之内。）由此可见，其所涉及的计算在本质上乃是个不断在作相对运动的坐标系之间的坐标变换。在此得提醒一个现代读者的，Kepler 在作这种计算的年代比笛卡儿的坐标几何的诞生 (1637) 还要早四十年！总之，这是一种十分艰巨的「科学猜谜」。因为我们所能实测者乃是由地球到火星的观测数据，而 Kepler 所要探索者则是地球和火星对于太阳的相对运动的规律！他在这个无比艰巨的科学猜谜的征程上屡猜屡败，但他坚毅不屈，奋斗了十多年才成功地发现了第一、第二定律。然後，又继续努力了整整十年，才发现了第三定律。这种艰苦奋斗，屡败不馁的经历，在 Kepler 的名著 *Astronomia Nova* 中都有详细的纪录。他不但告诉我们後之来者那辉煌的最後成功，他也忠实地记录下他每次失败的经验。其中最令人钦佩也最值得後学後进效法的是他在第 19 章之末所写的一段话。在那一章中

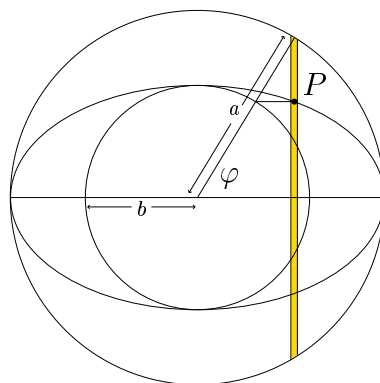
他对于又一个猜想进行计算，发现它和 Tyco de Brahe 的火星实测数据都吻合到 2 分（亦即 $\frac{1}{30}$ 度）而这正是上述观测的确保准确度。但是在他正要为大功终于告成而欢心鼓舞的时刻，突然记起还有另外四个实测数据忘了验算。一算之下发现误差是 8 分。在这个时刻，他写下这样一段话¹：「上帝赐与我们 Tyco de Brahe 的实测数据，是确保准到 2 分的。8 分的误差是不能接受的，让我们重新开始吧。」Kepler 就是以这种高洁的科学精神，不得真相永不休的奋斗才终于发现了 Kepler 行星运行三定律的。

8 由 Kepler 定律到牛顿万有引力定律

Kepler 三定律清楚地描述了行星运行的简单模式。一个自然的问题就是：「为什么行星会以太阳为其一焦点的椭圆轨道运行？」牛顿对这个问题给了一个直接的答案，即行星与太阳之间存在满足平方反比定律²的引力。而且这种引力同样地存在于任何两个物体之间，不论是火星与太阳或是苹果与地球，都是同一种引力；这就是牛顿著名的万有引力定律。现在让我们以现今的符号体系来重新看看牛顿这个对后世科学发展有著深远影响的工作。首先我们需要对椭圆的几何性质有一定的了解。

（一）椭圆面积公式：椭圆面积 $= \pi ab$

设椭圆的长、短径分别为 $2a, 2b$ 。现构造两个圆，半径分别为 a, b ，并把椭圆夹于两者之间，如 [图-21] 所示。



$$\begin{aligned} P &= P(x, y) \\ x &= a \cos \varphi \\ y &= b \sin \varphi \end{aligned}$$

[图-21]

考虑图中那条过 $P(x, y)$ 的窄条面积。由于 $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$ ，在椭圆内的窄条面积和整条窄条面积的比率约为：

$$\frac{2b \sin \varphi \Delta x}{2a \sin \varphi \Delta x} = \frac{b}{a}$$

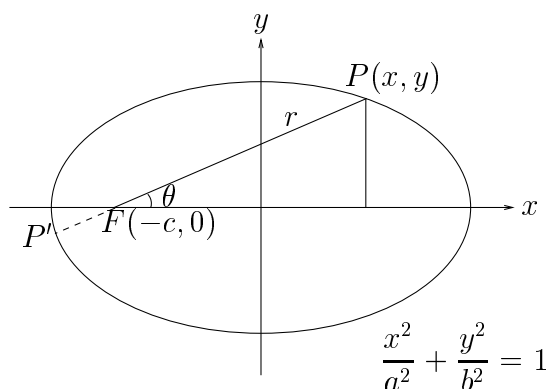
这是一个与 $P(x, y)$ 位置无关的常数。当把所有这种窄条的面积加起来时，便得

$$\text{椭圆面积} = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab$$

¹原文英译：“Since the divine benevolence has vouchsafed us Tyco Brahe, a most diligent observer, from whose observations the 8' error in this Ptolemaic computation is shown, Now, because they could not have been ignored, these eight minutes alone will have led the way to the reformation of all of astronomy,”

²注：在这里有一段小插曲。平方反比引力的猜测并不是源自牛顿，而是 Hooke 在研究自由落体轨迹时的猜想。但 Hooke 本身是一位实验科学家，他不懂怎样用数学方法去证明这个猜想。虽然他和牛顿之间曾因光是波动或粒子学说引起争论，他仍然写信给牛顿，希望牛顿能以数理分析的方法来给以证明。

(二) 椭圆的极坐标方程式



[图-22]

如 [图-22] 所示，椭圆上一点 P 有 (x, y) 和 (r, θ) 两种表示方法，而 (x, y) 和 (r, θ) 之间的转换可以用

$$r \cos \theta = x + c, \quad r \sin \theta = y$$

来达成。把上面转换方法代入熟悉的椭圆坐标方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，即得

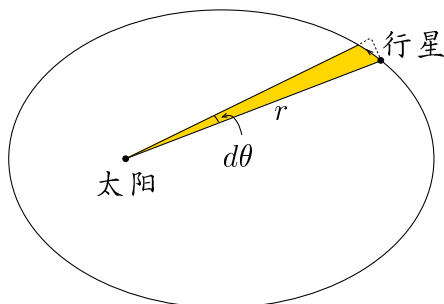
$$\begin{aligned} b^2(r \cos \theta - c)^2 + a^2(r \sin \theta)^2 - a^2b^2 &= 0 \\ b^2(r^2 \cos^2 \theta - 2cr \cos \theta + c^2) + a^2r^2(1 - \cos^2 \theta) - a^2b^2 &= 0 \\ (b^2 - a^2)r^2 \cos^2 \theta - 2b^2cr \cos \theta + b^2c^2 + a^2r^2 - a^2b^2 &= 0 \\ -c^2r^2 \cos^2 \theta - 2b^2cr \cos \theta - b^4 + a^2r^2 &= 0 \quad (a^2 = b^2 + c^2) \\ a^2r^2 - (rc \cos \theta + b^2)^2 &= 0 \\ [ar - (rc \cos \theta + b^2)][ar + (rc \cos \theta + b^2)] &= 0 \end{aligned}$$

因此 $r = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}$ ($r = \frac{-b^2}{a + c \cos \theta}$ 是负值，它会以 P' 来描绘出椭圆)。为了方便以后的计算，我们取其颠倒式为椭圆极坐标方程式：

$$\frac{1}{r} = \frac{a - c \cos \theta}{b^2}$$

(三) 第二定律的数理分析

以太阳（焦点）为中心，极坐标 (r, θ) 表达行星位置。当 θ 增大到 $\theta + d\theta$ 时，太阳与行星的连线所扫过的面积为 $dA \approx \frac{1}{2}r^2d\theta$ ，如 [图-23] 所示



[图-23]

运用第二定律，这个面积的改变速率为常数，即：

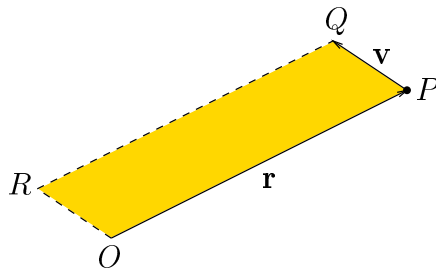
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega = k, \quad (k: \text{常数}, \omega: \text{角速度})$$

$$\text{椭圆面积} = \pi ab = \int_0^T dA = \int_0^T k dt = kT \quad (T: \text{周期})$$

$$r^2 \omega = 2k = \frac{2\pi ab}{T}$$

注意在上面我们只是用了微积分的记号和想法。

[注]：从物理学观点来看，第二定律是有物理意义的。如 [图-24] 所示， $\mathbf{r}$ 是动点 P 的位置向量， $\mathbf{v}$ 是其速度向量：



[图-24]

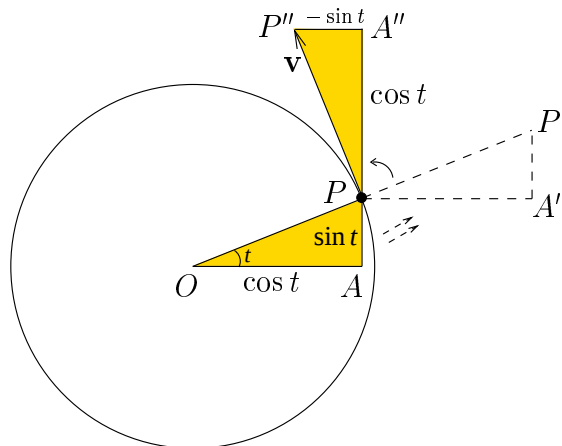
$|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ 是平行四边形 $OPQR$ 的面积。但从物理学观点来看， $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ 是物体相对于 O 点的角动量，因为是平面（椭圆）运动，此向量是恒垂直于平面的，所以由第二定律亦可得知角动量在行星运行中是不变的（这也是人类理性文明中首次接触到角动量守恒律）。再者，

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

所以引力 $\mathbf{F}$ 的作用方向是和 $\mathbf{r}$ 反向平行。

(四) 温习： $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 的微分

从圆的简单几何性质和简单的物理观念，我们很容易便得出 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 的微分。其简单的推导如下：



[图-25]

如 [图-25] 所示，动点 P 在单位圆上作单位速率运动。用熟知的圆的参数表示方法， P 的坐标可写成 $(\cos t, \sin t)$ 。另一方面，从几何观点得知速度向量应是垂直于半径，所以把图中的 $\triangle OAP$ 平移至 $\triangle PA'P'$ 再旋转 $\frac{\pi}{2}$ 至 $\triangle PA''P''$ 。这样，速度向量 $\mathbf{v}$ 在 $\vec{Ox}, \vec{Oy}$ 的分量为：

$$v_x = -\sin t, \quad v_y = \cos t$$

但从物理学观点来说，速度向量 $\mathbf{v}$ 正是：

$$\mathbf{v} = \left(\frac{d}{dt} \cos t \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{d}{dt} \sin t \right) \mathbf{e}_y$$

因此即得下面熟悉的公式：

$$\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t, \quad \frac{d}{dt} \sin t = \cos t$$

(五) 向心加速的公式： $-(r\omega^2 + \frac{d^2 r}{dt^2})$

上述公式只需对坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 直接微分便可得出。计算过程大致如下：

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r\omega \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r\omega \cos \theta \end{cases} \quad (\omega = \dot{\theta}) \\ \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r} \cos \theta - r\omega^2 \cos \theta - 2\dot{r}\omega \sin \theta - r\dot{\omega} \sin \theta \\ \ddot{y} = \ddot{r} \sin \theta - r\omega^2 \sin \theta + 2\dot{r}\omega \cos \theta + r\dot{\omega} \cos \theta \end{cases} \end{aligned}$$

因此

$$(\ddot{x}, \ddot{y}) = (\ddot{r} - r\omega^2)(\cos \theta, \sin \theta) + (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})(-\sin \theta, \cos \theta)$$

由 (四) 知引力的方向是平行于位置方向 $(\cos \theta, \sin \theta)$ ，所以 $(2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})$ 应该是 0，并只余下向心加速 $-(r\omega^2 + \ddot{r})$ 。

(六) 平方反比定律的证明 (第一、第二定律的综合分析)

要证明引力是满足平方反比定律，我们只需验证 $r^2 \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 \right)$ 是否为一常数。先对椭圆的极坐标方程式微分：

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{a - c \cos \theta}{b^2} \\ -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} &= \frac{c}{b^2} \sin \theta \omega \\ \Rightarrow \frac{dr}{dt} &= -\frac{c}{b^2} \sin \theta r^2 \omega = -\frac{2\pi ac}{bT} \sin \theta \end{aligned}$$

在上式用了 (三) $r^2 \omega = \frac{2\pi ab}{T}$ 。同样地在下面的计算中，我们尽可能分离出 $r^2 \omega$ 这一项，然後换成常数 $\frac{2\pi ab}{T}$ 。

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 r}{dt^2} &= -\frac{2\pi ac}{bT} \cos \theta \omega \\
\Rightarrow r^2 \frac{d^2 r}{dt^2} &= -\frac{2\pi ac}{bT} \cdot \frac{2\pi ab}{T} \cos \theta = -\frac{4\pi^2 a^2}{T^2} c \cos \theta \\
r^2 (-r\omega^2) &= -r^3 \omega^2 = -\frac{1}{r} (r^2 \omega)^2 = -\frac{1}{r} \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} \\
&= -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} + \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} c \cos \theta
\end{aligned}$$

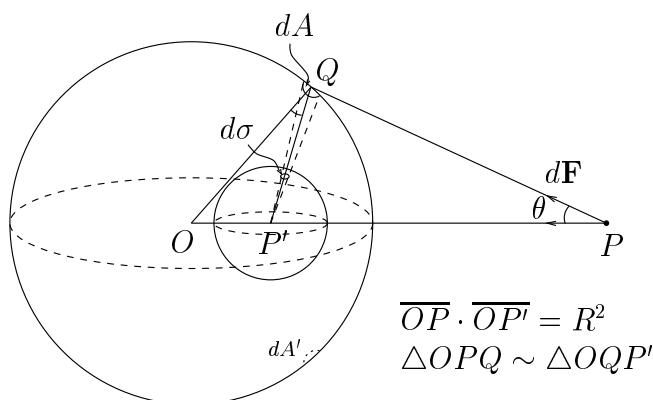
因此 $r^2 \left[-r\omega^2 + \frac{d^2 r}{dt^2} \right] = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ 。

(七) 由行星引力到万有引力

当牛顿想再进一步把行星与太阳之间的引力推广到任何物体与物体之间的引力，他遇到一个困难，使这位科学史上的巨人困扰了数年。由于行星与太阳之间的距离很大，所以在计算中可把行星和太阳当作两个质点，即可以假设质点集中了整个球体的质量；但当推广至任何物体与物体之间的情形，如苹果与地球，则便不可随便地把地球当作一个质点了。牛顿遇到的困难，就是他不能证明的确可以把地球当作质点的猜想。即使在 1684 年他的好友 Halley（哈雷）力邀牛顿发表已得的结果，他仍不愿意³发表。到了 1686 年，他终于成功地证明了上述猜想，即一个密度只随著到球心距离而变化的球体，在吸引球外一个质点时，所作用的力就像假设全部质量都集中在球心一样。在这年他写信给 Halley 表示同意写出他的工作，这就是在次年 (1687) 出版的科学巨著《自然哲学的数学原理》(Philosophiae Naturalis Principia Mathematica)。

牛顿在书中所给的证明是很繁复的。在这里，我们给出另一个证明，它巧妙地运用了球的几何特性而大大简化了计算过程。

一个球面的最自然、最对称的点当然就是球心。但当球面与球外一点有互相作用时，从几何观点来看，最自然、最对称的点就不再是球心，而是 [图-26] 的 P' 点（这是 P 相对于球面的反射对称点）。



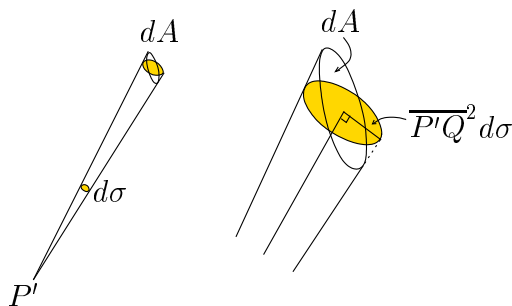
[图-26]

³其後牛顿在给 Halley 的信中提到，直至 1685 年，他还在怀疑这个猜想是错的。

设球体其中一层薄壳的半径为 R ，面密度为 ρ ，薄壳质量为 $M = 4\pi R^2\rho$ ，球外质点 P 的质量为 m 。考虑在薄壳上的一小片面积 dA 作用于 P 的引力 $d\mathbf{F}$ 。因薄壳对于 OP 是旋转对称， $d\mathbf{F}$ 垂直于 OP 的分量会被对称小片 dA' 所作用力抵消，所以只需考虑 $d\mathbf{F}$ 在 OP 方向的分量：

$$|d\mathbf{F}| \cos \theta = G \frac{\rho dA \cdot m}{PQ^2} \cos \theta$$

在直线段 $\overline{OP}$ 上选 P' 使得 $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = R^2$ ，并以 P' 为心构造一个单位球面。令 P' 连向 dA 的射线在这单位球面上的影象为 $d\sigma$ 。



[图-27]

如 [图-27] 所示， dA 和 $d\sigma$ 之间有一个简单的关系：

$$dA \cdot \cos \theta = \overline{P'Q}^2 \cdot d\sigma$$

因此，整个薄壳作用于 P 的力就是

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}| &= \sum |d\mathbf{F}| \cdot \cos \theta = \sum Gm\rho \frac{dA \cdot \cos \theta}{PQ^2} = \sum Gm\rho \frac{\overline{P'Q}^2 \cdot d\sigma}{PQ^2} \\ &= \sum Gm\rho \frac{R^2}{OP^2} d\sigma = Gm\rho \frac{R^2}{OP^2} \sum d\sigma \\ &= Gm\rho \frac{R^2}{OP^2} \cdot 4\pi = G \frac{Mm}{OP^2} \end{aligned}$$

因此这层薄壳作用于 P 的力就相等于将全部质量 M 集中于 O 而作用于 P 的力。再将所有薄壳作用的力加起来，便得所需结果。

这也就是由 Kepler 行星运行定律的数理分析自然而然地推导出牛顿万有引力定律的一个简朴详尽的叙述。它就是牛顿的科学巨著 *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* 中所讨论的主要结果。它也自然是後学後进应当心领神会，并从此体会人类理性文明世代相承，继往开来的精要和精神。