

第六章：欧氏几何、球面几何和非欧几何的统一理论

自古到今，人类理性文明世代相承、精益求精地对于我们和万物万象共存于其中的空间的本质的研究，总称之为几何学。在人类理性文明的发展史上，几何学在古希腊时代获得长足的进展，其辉煌的成就有赖于 Euclid 所著的几何原理 (Elements) 集其大成，流传后世，所以现在通常把它称之为欧氏几何学 (Euclidean Geometry)。Euclid 的 Elements 对于当代研讨所得的几何认知，采用「公理化」的论述方式。[其实，公理化的论述方式并非 Euclid 所首创，Euclid 的体系大概可以追溯到 Eudoxus 的论著；可惜 Eudoxus 的原著早已失传，我们已无缘得见其原貌了。] 概括地说，公理化的论述方式乃是选定一组简朴而且基本的性质作为起点，有系统地逐步推演所要研讨的事物（例如几何学所要研讨的空间）的其他各种各样有用、常用的性质。当年把所选用的基础性性质（起点）叫做公理，把那些由公理演绎推导而得者叫做定理。对于欧氏几何学的公理体系和公理化治学的要点，在 1899 年 Hilbert 所著的几何基础论 (Grundlagen der Geometrie) 中有详尽的讨论，可供有意深究者参阅。大体上来说，公理化的方法论也就是用逻辑推理来对于某一种知识体系构造一种性质层面上的以简御繁。

长话短说，我们所在的空間的各种各样本质之中，最为简朴基本者有下述四种，即

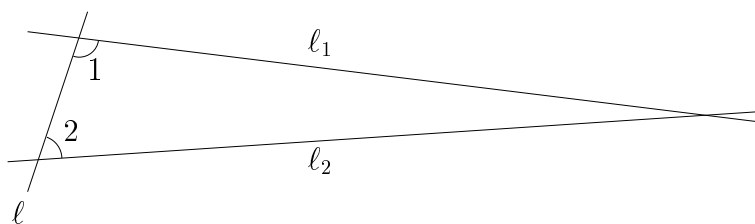
1. 基本结构：点、线、面的连结与分隔；
2. 连续性：直线的连续不断 $\longleftrightarrow$ 实数系的连续性；
3. 对称性：空间对于平面的反射对称性 $\longleftrightarrow$ 叠合公理 (S.A.S.) 等；
4. 平直性：平行公理 $\longleftrightarrow$ 三角形内角和恒等于一平角。

从几何直观来看，前三者的直观内涵都十分明确、自然，唯独平直性的直观内涵令人难以理解其精要何在？此事一直到十九世纪初才真相大白，这也就是为什么从古希腊到十八世纪末，二千多年来很多几何学家都对于平行公理感到不自在，因而都想（用其他公理来）证之而後快的原由。一直到十九世纪初 (Bolyai, Lobachevsky, Gauss) 非欧几何学的发现才一方面知道平行公理是不能用其他公理来加以论证的，而另一方面也搞清楚平行公理的直观内涵乃是空间的「本质性曲率」等于零（亦即平直性）。

本章将以微积分为工具，对于欧氏、球面与非欧这三种几何，建立其求同存异的统一理论，作为微积分在理解空间本质结构中的一个重要应用之范例。

1 非欧几何的发现过程及其历史意义

在欧氏所著的 Elements 中所论述的几何学公理体系之中，其第五公设也就是我们通常称之为平行公理者，即平面上任给两条直线 l_1, l_2 ，若其为另一直线 l 交截的同旁内角之和少于平角，则 l_1, l_2 必定相交于 l 的该侧，亦即如 [图-1] 所示：



$\angle 1 + \angle 2 < \text{平角}$
 $\Rightarrow l_1, l_2 \text{ 相交于}$
 $\angle 1, \angle 2 \text{ 之同侧}$

[图-1]

若我们对于整个欧氏几何学的逻辑体系再作一次详细的分析，就会发现上述第五公设在所有定量几何的基本定理（如三角形内角和定理、面积公式、相似三角形定理、毕氏定理等等）的论证之中都扮演著基本重要的角色。但是这个第五公设所反映的空间本质的直观内含究竟是什麼呢？却又是一直困扰著古希腊到十九世纪初非欧几何学的发现之前世世代代的几何学家的老大疑问。他们对于上述几何基础论上的疑难的研究大致上可以分成三个阶段：

【第一阶段】：试著改用其他几何命题来替代第五公设，例如当然可以用三角形内角和恒等于平角来替换平行公理。但是这种尝试并不成功，因为他们用来替代的几何命题的直观内含依然难以捉摸。

【第二阶段】：试著用欧氏公理体系中其他的公理去证明第五公设。假若真的能够达成这样一个证明的话，则第五公设就可以根本从公理体系中省却！岂不使得整个几何公理体系更加简洁明了？但是此事两千多年来，世世代代的几何学家们，屡试皆败，事与愿违。

【第三阶段】：从世世代代试证第五公设的教训中，促使十八、十九世纪的某些几何学家们去探索另一种几何体系的可能性，亦即是否存在著另一种满足唯独在第五公设上和欧氏体系相异的几何体系？假如存在的话，一方面使我们充分理解為什麼试证平行公理屡试必败！而另一方面也可从欧氏几何和这种大同小异的「非欧几何」的本质的异同比较之中，真正认识到第五公设的直观内含究竟是什麼！在这方面的探讨终于在十九世纪初获得了突破性的成功，这就是当年 Bolyai, Lobachevsky 和 Gauss 在非欧几何学的发现与建立上的重大成就。

长话短说，如今我们已经知道这种和欧氏几何大同小异（亦即仅仅在三角形内角和上与欧氏几何相异而在其他各方面完全和欧氏几何相同）的非欧几何体系是存在的。现在我们来回顾这一段历史性的进展，似乎宜于下述两点著手研讨之，即

- 一、 导致非欧几何学之发现的思路和重要的突破点是那些？
- 二、 欧氏几何、球面几何和非欧几何乃是三种大同小异的几何体系，其大同在于它们都具有同样的连续性和对称性，而其小异则在于它们的三角形内角和分别是等于、大于和小于一个平角。是否可以求大同存小异，建立起一种统一这三种几何学的理论呢？

这也就是我们要接著详加研讨的中心课题。

2 发现非欧几何学的思路与突破点

骤看起来，非欧几何学的发现当然是一种存在性问题，其所要探索者乃是某种数理模型（亦即体系）是否存在的问题。大体上来说，在各种各样的数理模型的研讨之中，存在性

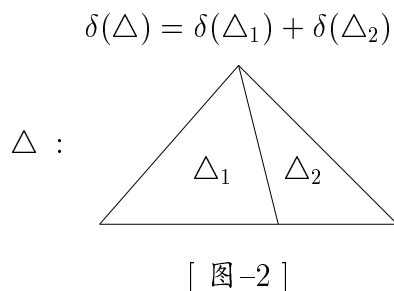
问题和唯一性问题乃是两个既相对又相关的基本问题。在这里有一个耐人寻思、富有哲理的想法，那就是存在性的探索往往要先从唯一性的研讨著手。其实，後者经常是达成前者的捷径。这种想法骤听起来难免感到太玄了些，但是稍加分析，就不难初步看出它的合理性。因为要凭空构造出一种具有各种各样基本性质的数理模型有如大海捞针，往往是徒劳无成的。而唯一性方面的研讨正好就是逐步缩小范畴，也就自然而然地把所要构造的事物逐步加以明确。

把上述想法运用到「非欧几何」的探索上，就是要深入研讨那些不依赖于第五公设就能证明的几何定理。例如下述定理就是其中一个重要的突破点，即

【定理 1】：三角形的内角和不大于一个平角。

【定理 2】：若有一个三角形的内角和等于一个平角，则所有三角形的内角和皆恒等于一个平角。

由此可见，我们所要探索者，乃是那种三角形内角和恒小于一个平角的几何体系。很自然我们可以把平角和一个三角形的内角和的差额定义为该三角形的「角亏」；当我们把一个三角形分割成两个三角形，如 [图-2] 所示，易见它的角亏乃是两个子三角形的角亏之和，亦即



显然，三角形的面积也有同样的分割可加性，即

$$A(\Delta) = A(\Delta_1) + A(\Delta_2)$$

再者，角亏和面积当然都是叠合不变量，而且它们也具有同样的「包含不等式」，即

$$\Delta \supseteq \Delta' \Rightarrow \begin{cases} A(\Delta) \geq A(\Delta') \\ \delta(\Delta) \geq \delta(\Delta') \end{cases}$$

用上述三点共同的性质就可证得

【定理 3】：在一个给定的非欧几何体系中，任给三角形的角亏和面积之间的比值乃是一个本质性的常数，亦即存在一个常数 K 使得

$$\delta(\Delta) = KA(\Delta)$$

对于所有三角形恒成立。

三角形乃是最为简朴的二维几何事物，三角形的几何性质则自然而然的是整个几何学的基础所在。在欧氏几何体系中，三角形的内角和恒等于一个平角和 S.A.S. 叠合条件分别反映著空间的两大基本性质，亦即平直性和对称性。在非欧几何体系中，上述[定理 3]乃是前者的变化，而 S.A.S. 的三角形叠合公理则完全同样成立，这也就是非欧几何体系和欧氏几何

体系具有完全同样的对称性的另一种表达方式。从定量几何的观点来看，S.A.S. 叠合条件乃是说三角形的六个基本量（三边边长和三角角度）之间，其他三者乃是选定的两边一夹角的函数，而欧氏三角学中的正弦定律和余弦定律则是把任意三角形的角边之间的函数关系加以具体明确的定量几何基本定理，它们又是进而用解析法研讨几何的基础工具。可以说欧氏三角学乃是欧氏三角形的解析几何，而它又是整个欧氏解析几何学的基石所在。由此可见对于所要探索的非欧几何体系的唯一性研讨的重大突破点，理当在于其中任意三角形的三边三角之间的函数关系的确定，亦即我们所要进而研讨的要点在于其中任意三角形的「正弦、余弦定律」。

首先，为了便于讨论，我们可以适当地选定长度的单位使得[定理 3]中的常数 $K = 1$ 。就好像在研讨球面几何时，半径为 R 的球面上，三角形的角盈和面积之间的关系式乃是

$$\varepsilon(\Delta) = \frac{1}{R^2} A(\Delta)$$

假如我们改用其半径为长度单位，则上述关系式就可以简化为 $\varepsilon(\Delta) = A(\Delta)$ 。

长话短说，Bolyai, Lobachevsky 和 Gauss 各别在十九世纪初叶所达成的重大突破也就是确立了非欧空间中的正弦、余弦定律，即

$$\text{非欧正弦定律} : \frac{\sin A}{\sinh a} = \frac{\sin B}{\sinh b} = \frac{\sin C}{\sinh c}$$

$$\text{非欧余弦定律} : \begin{cases} \sinh a \sinh b \cos C = \cosh a \cosh b - \cosh c \\ \sinh b \sinh c \cos A = \cosh b \cosh c - \cosh a \\ \sinh c \sinh a \cos B = \cosh c \cosh a - \cosh b \end{cases}$$

[注]：双曲正弦、余弦函数 $\sinh t$ 和 $\cosh t$ 的定义式是

$$\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}), \quad \cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

其命名之原由是 $x = \cosh t, y = \sinh t$ 所表达之曲线乃是双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 之一支。再者，由 Euler 公式 $e^{it} = \cos t + i \sin t$ 可见：

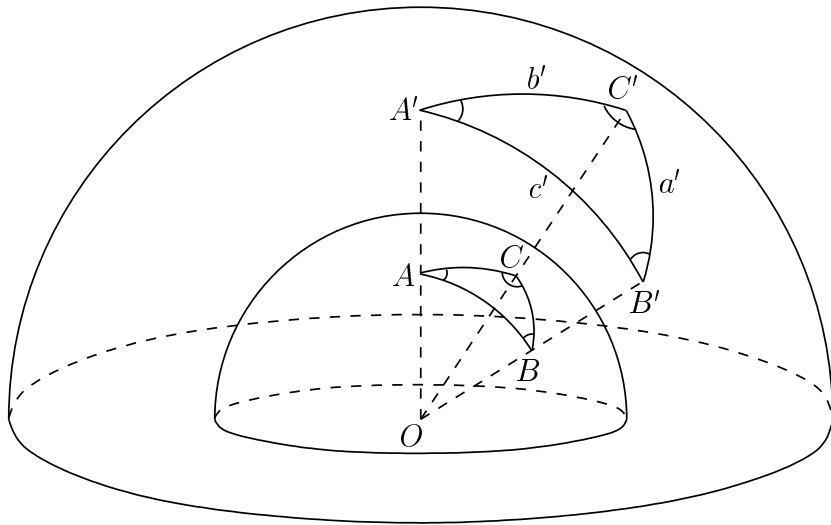
$$\sin(it) = i \sinh t, \quad \cos(it) = \cosh t$$

3 欧氏、球面与非欧三角定律的统一理论

欧氏、球面与非欧乃是三种具有同样的连续性和对称性的几何体系，例如其中的三角形都满足 S.A.S. 叠合公理，而在三种几何学中各别的正弦余弦定律则是三种解析几何的基础所在。假如我们把三种几何的正弦、余弦定律加以比较分析，就会看到三者的正弦定律在形式上十分相似，即

$$\begin{aligned} \text{欧氏正弦定律} : & \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \\ \text{球面正弦定律} : & \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \\ \text{非欧正弦定律} : & \frac{\sin A}{\sinh a} = \frac{\sin B}{\sinh b} = \frac{\sin C}{\sinh c} \end{aligned}$$

但是欧氏余弦定律和其他两种在形式上则相差甚远，倒是球面和非欧余弦定律则十分相似。



[图-3]

如 [图-3] 所示，把单位球放大 R -倍，即得半径为 R 的球面。令 $\widehat{\triangle}ABC$ 和 $\widehat{\triangle}A'B'C'$ 分别是相应的球面三角形，则有 $A' = A, B' = B, C' = C, a' = Ra, b' = Rb, c' = Rc$ 。由此可见半径为 R 的球面上的正、余弦定律分别是

$$(1) \quad \frac{\sin A'}{\sin \frac{a'}{R}} = \frac{\sin B'}{\sin \frac{b'}{R}} = \frac{\sin C'}{\sin \frac{c'}{R}}$$

$$\sin \frac{a'}{R} \sin \frac{b'}{R} \cos C' = \cos \frac{c'}{R} - \cos \frac{a'}{R} \cos \frac{b'}{R} \quad \text{等等}$$

我们可以把上述半径为 R 的球面上的正、余弦定律略作变化，即改写为

$$(1)_R \quad \frac{\sin A'}{R \sin \frac{a'}{R}} = \frac{\sin B'}{R \sin \frac{b'}{R}} = \frac{\sin C'}{R \sin \frac{c'}{R}}$$

$$R^2 \sin \frac{a'}{R} \sin \frac{b'}{R} \cos C' = R^2 \left(\cos \frac{c'}{R} - \cos \frac{a'}{R} \cos \frac{b'}{R} \right) \quad \text{等等}$$

从几何的观点，很自然地可以把欧氏平面想成是球面无限放大的局部形式。因此，欧氏正、余弦定律应该可以表达成 R -球面上的正、余弦定律在 $R \rightarrow \infty$ 的极限形式。用上述改写後的形式就很容易看到这一点，即有

$$(2) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R \sin \frac{a'}{R} = a' \lim_{\frac{a'}{R} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{a'}{R}}{\frac{a'}{R}} = a' \cdot 1 = a',$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \left(1 - \cos \frac{c'}{R} \right) = c'^2 \lim_{\frac{c'}{R} \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{c'}{R}}{\left(\frac{c'}{R} \right)^2} = \frac{1}{2} c'^2,$$

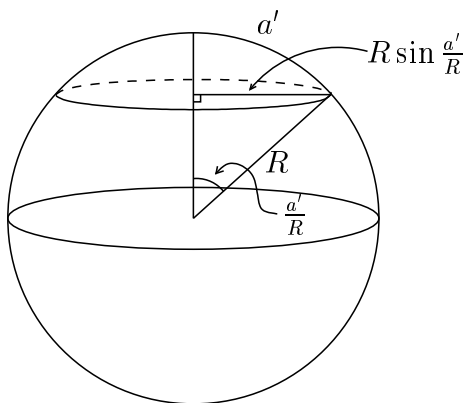
$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \left(1 - \cos \frac{a'}{R} \cos \frac{b'}{R} \right) = \frac{1}{2} (a'^2 + b'^2).$$

所以 $(1)_R$ -式在 $R \rightarrow \infty$ 的极限形式就是

$$(1)_\infty \quad \frac{\sin A'}{a'} = \frac{\sin B'}{b'} = \frac{\sin C'}{c'}$$

$$a'b' \cos C' = \frac{1}{2}(a'^2 + b'^2 - c'^2), \quad \text{等等}$$

这也就是欧氏正、余弦定律。其实，在 R -球面正弦定律中所出现的函数 $R \sin \frac{a'}{R}$ 还有其自然的几何意义，即如 [图-4] 所示



[图-4]

R -球面上一个半径为 a' 的圆周周长等于 $2\pi R \sin \frac{a'}{R}$ 。由此可见， R -球面的正弦定律还可以进一步改写成下述富有几何意义的形式，即

$$(3) \quad \frac{\sin A}{\bigcirc a} = \frac{\sin B}{\bigcirc b} = \frac{\sin C}{\bigcirc c}$$

其中 $\bigcirc r$ 表示半径为 r 的圆周周长。

相信当年（1825 年前後）Bolyai 很可能就是从类似的分析而想到在非欧空间的正弦定律也应该是上述形式，而且他当时业已研讨得非欧空间中半径为 r 的圆周周长公式乃是

$$(4) \quad \bigcirc r = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} \sinh \sqrt{K} r$$

其中本质性常数 K 就是 $\delta(\Delta) : A(\Delta)$ 的那个比值常数。

[注]：角亏 $\delta(\Delta)$ 乃是负的角盈 $\varepsilon(\Delta)$ 。在 R -球面上，三角形的面积公式可写成

$$\varepsilon(\Delta) = \frac{1}{R^2} A(\Delta)$$

亦即 $\varepsilon(\Delta) = K A(\Delta)$, $K = \frac{1}{R^2}$ 。而 R -球面中的 $\bigcirc r$ 函数则可以改写成

$$\bigcirc r = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K} r$$

再者，在非欧空间的面积公式则是

$$\varepsilon(\Delta) = -\delta(\Delta) = -K A(\Delta)$$

而上述圆周周长公式 (4) 则可以改写成

$$(4') \quad \bigcirc r = \frac{2\pi}{\sqrt{-K}} \sin \sqrt{-K} r \quad \left(= \frac{2\pi}{i\sqrt{K}} (i \sinh \sqrt{K} r) \right)$$

总结上面的分析所得，对于欧氏、球面和非欧几何的本质有下述统一全局的几个要点：

(一) 三角形内角和与面积之间的关联：

$$\varepsilon(\triangle) = A + B + C - \pi = KA(\triangle)$$

其中本质性常数 K 在欧氏空间为零，球面空间为正而非欧空间为负。

(二) 圆周周长公式：

$$\bigcirc r = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K} r$$

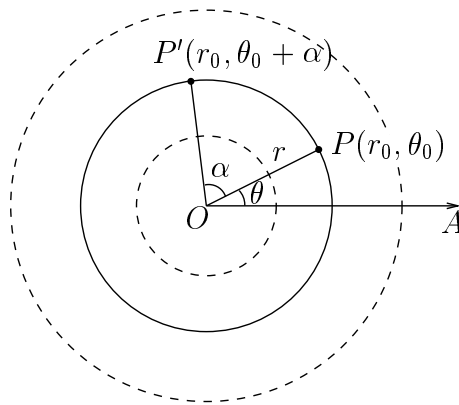
(三) 正弦定律：

$$\frac{\sin A}{\bigcirc a} = \frac{\sin B}{\bigcirc b} = \frac{\sin C}{\bigcirc c} \quad (\text{Bolyai})$$

从几何结构和空间模型的观点来看，欧氏、球面和非欧这三种空间模型所共有的基本结构就是连结于各点之间的最短通路（亦即欧氏、非欧空间的直线段和球面的大圆圆弧）而它们所共有的基本性质则是它们所具有的反射对称性（亦即 S.A.S. 三角形叠合公理）。对于这样的空间，其中最为简单基本的几何事物首推直线段、三角形和圆，而最为基本重要的几何量则是直线段的长度，三角形的边长、角度和面积。再者，上述三点当然就是三种几何学中的基本定理的统一形式！由此可见，对于这三种具有最为丰富的对称性的几何的统一理论当然就要从上述三点的统一论证著手研讨之。

首先，让我们对于欧氏和球面的正弦定律的几何内涵再来下一番温故知新的功夫。

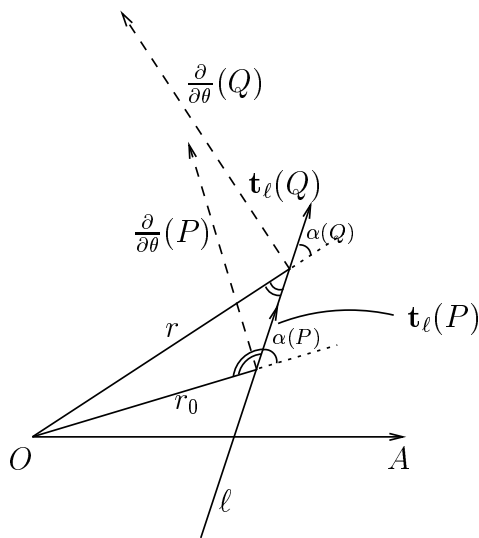
(i) 欧氏平面对于任给一点 O 的旋转对称可以用其上以 O 点为原点的极坐标加以简洁描述，如 [图-5] 所示。



[图-5]

一个绕 O 点 α 角度的旋转把极坐标为 (r_0, θ_0) 的 P 点映射到极坐标为 $(r_0, \theta_0 + \alpha)$ 的 P' 点。再者，在绕 O 点的旋转运动之下， $P(r_0, \theta_0)$ 的轨道就是以原点为圆心的圆，亦即其极坐标方程式就是 $r = r_0$ 。

(ii) 对于上述极坐标，射线 $\overrightarrow{OP}$ 的方程就是 $\theta = \theta_0$ ，而一条过原点 O 的直线的方程式则是 $\theta = \theta_0$ 或 $\theta_0 + \pi$ 。现在让我们再来看一下其他那些不过原点的直线的极坐标方程式应该如何表达？如 [图-6] 所示，设 ℓ 是一条过 $P(r_0, \theta_0)$ 点但是不过原点的直线。



[图-6]

如 [图-6] 所示，设 Q 是 ℓ 上任给一点。令 $\alpha(P), \alpha(Q)$ 分别是 ℓ 和矢径 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ 之间的夹角。由 $\triangle OPQ$ 的正弦定律，即得

$$(5) \quad \frac{\sin(\pi - \alpha(P))}{r} = \frac{\sin \alpha(Q)}{r_0}$$

亦即

$$(5') \quad r \sin \alpha(Q) = r_0 \sin(\pi - \alpha(P)) = r_0 \sin \alpha(P)$$

所以那些不过原点的直线的极坐标方程式乃是

$$(6) \quad r \sin \alpha = \text{常数}$$

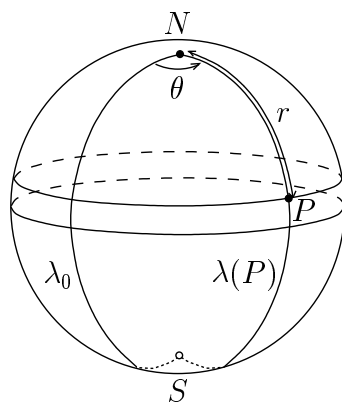
(iii) 设想全平面对于 O 点作单位角速度的旋转运动，则它在每一点 $P(r_0, \theta_0)$ 的速度向量就是那个圆周 $r = r_0$ 在 P 点的切向量，其长度等于半径 r_0 （亦即 [图-6] 中所示之 $\frac{\partial}{\partial \theta}(P)$ ，这是往後在多元分析学中通用的符号，它所表达者乃是只有 θ -坐标作单位变率的速度向量）。再者，沿著直线 ℓ 的单位速率的速度向量当然就是直线 ℓ 在该点的单位长切向量，分别以 $\frac{\partial}{\partial \theta}(P)$ 和 $\mathbf{t}_\ell(P)$ 表示上述两种速度向量，则直线方程 (6) 的几何意义就是：

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta}(P) \cdot \mathbf{t}_\ell(P) &= \left| \frac{\partial}{\partial \theta}(P) \right| \cdot |\mathbf{t}_\ell(P)| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= r \sin \alpha = \text{常数} \end{aligned}$$

[注]：若用运动学的观点来说，上述方程式也就是直线等速运动的角动量守恒定律是也。

接著，让我们再用同样的观点来分析球面上的情形如下：

(i) 有鉴于球面的均匀性 (homogeneity)，不妨设给定的原点位于北极 N ，则单位球面以北极为原点的极坐标为 [图-7] 所示：



[图-7]

在球面对于北、南极的旋转运动之下，其轨道乃是「 $r = \text{常数}$ 」的纬圆，而过北、南极的大圆则是经线。

(ii) 同样的，我们以 $\frac{\partial}{\partial \theta}(P)$ 表示上述单位角速度的旋转运动在 P 点的速度向量，则它就是纬圆在 P 点的切向量，其长度为 $\sin r$ 。

另一方面由球面正弦定律也可以得出球面上的大圆的极坐标方程式乃是

$$(8) \quad \sin r \sin \alpha = \text{常数}$$

而且上述测地线（亦即大圆）方程的几何意义也同样的

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(P) \cdot \mathbf{t}_\ell(P) = \text{常数}$$

亦即是球面测地线等速运动的角动量守恒定律。

由上面这样一段「温故」，我们认识到欧氏、球面正弦定律其实就是测地线上等速运动的角动量守恒定律，亦即

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(P) \cdot \mathbf{t}_\ell(P) = \text{常数}$$

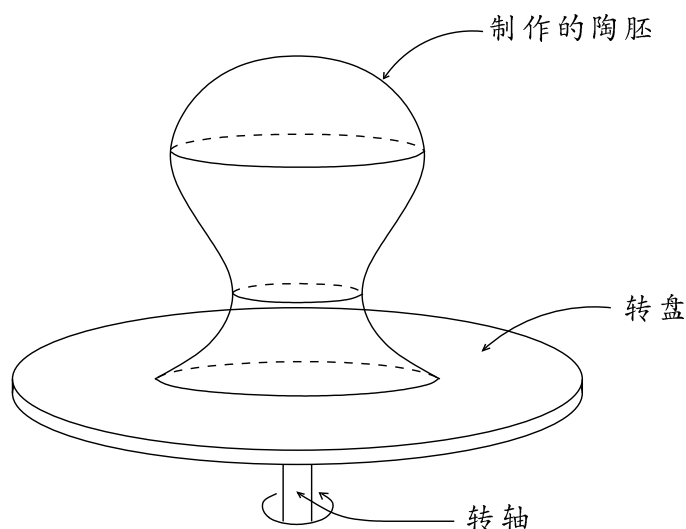
由此自然会想到非欧正弦定律也一定就是这种角动量守恒定律，而且三种角动量守恒定律应该具有一种适度的推广加以统一，通常这种更加广泛成立的定律的证明往往会比原先各别论证其特殊情形的证法反而更加简明朴素。这也就是我们在下一节所要研讨的课题。

4 旋转面的解析几何

从前面的逐层剖析和一路探讨，使得我们认识到旋转面的解析几何乃是能够把三种几何的三角学统一起来的自然范畴，因此三种几何中的正弦定律应该可以推广成旋转面上的测地线方程的普遍形式而加以统一！

旋转面在人类的历史文明中，在远古的陶器中即已经经常出现。在很多博物馆展览的石器时代的出土陶器，经常可以见到造型柔美、旋转对称的陶器。如今以怀古之情，想像远古

先民在一个转盘上制作它们的情景；对称性的运用在人类文明中的久远与广泛，令人神往。

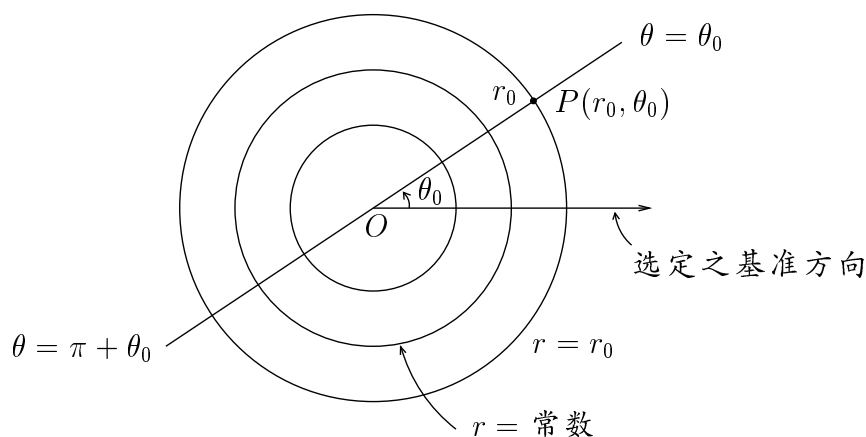


[图-8]

旋转面的极坐标表达方式

旋转面乃是那种具有旋转对称性的三维几何模型。例如欧氏平面、球面、[图-8]所示的陶胚面和非欧面等等都是旋转面的例子。我们现在要用解析法去研讨一个旋转面的几何，很自然地应该采用极坐标的表达方式。

设 M 是一个对于基点 O 旋转对称的旋转面。对于其上另外一点 P ，令 r 为 O, P 之间的距离，不妨设 O, P 之间的最短通路（亦即测地线）唯一存在（因为只有像球面上 O, P 互相对顶的这种特殊情形，其间最短通路才会不唯一），我们将以符号 $\overline{OP}$ 表达之。再者，令 θ 为 $\overline{OP}$ 和一个选定的基准方向之间的定向夹角，则 (r, θ) 就叫做 P 点的极坐标，如 [图-9] 所示。



[图-9]

由极坐标的定义，可见「 $r = \text{常数}$ 」所代表者乃是以基点为圆心的同心圆系，它们也就是 M 在旋转对称的转动之下的轨道。再者，「 $\theta = \text{常数}$ 」所表达者，则是其他各点到基点的最短通路，例如欧氏平面中的射线和球面上连结南北极的经线。所以那些通过基点 O 的测地线方程也就是 $\theta = \theta_0$ 或 $\theta = \theta_0 + \pi$ 。

对于一个旋转面 M 上的解析几何，所要研讨的一个首要课题就是那些不过基点的测地线应该如何表达？其研讨之所得即为下述[定理 4]:

【定理 4】：设 M 是一个给定的旋转面， (r, θ) 是其上以基点 O 为原点的极坐标系，则 M 上的测地线方程乃是

$$(10) \quad \bigcirc r \sin \alpha = \text{常数}$$

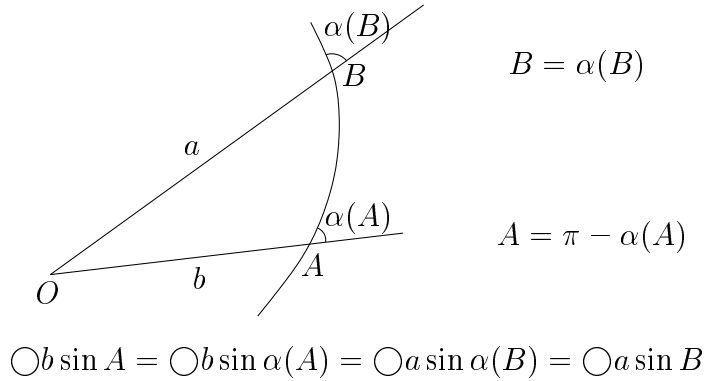
其中 $\bigcirc r_0$ 是 $r = r_0$ 的圆周周长， $\alpha(P)$ 是测地线在 P 点和矢径 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角。

上述[定理 4]的几何意义有二，其一是它乃是欧氏、球面和非欧这三种几何的正弦定律的共同推广，其二则是旋转面上等速测地运动的角动量守恒定律的普遍成立，即

【推论 1】（广义正弦定律）：设 M 是对于基点 O 旋转对称者， $\triangle OAB$ 是以基点为其顶点之一的三角形，则有

$$(11) \quad \frac{\sin A}{\bigcirc a} = \frac{\sin B}{\bigcirc b}$$

其中 a, b 分别是 A, B 的对边边长。[如 [图-10] 所示，它是[定理 4]的直接推论。]



[图-10]

【推论 2】（ M 上对于旋转的角动量守恒定律）：

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(P) \cdot \mathbf{t}_\ell(P) = \frac{1}{2\pi} \bigcirc r \sin \alpha(P) = \text{常数}$$

[定理 4]还有一个重要的推论，即：

【推论 3】（广义余弦定律）：令 c 为 $\triangle OAB$ 的第三边边长，亦即 $c = \overline{AB}$ ，则

$$(13) \quad c = \int_b^a \frac{f(r)dr}{\pm \sqrt{f(r)^2 - (f(b) \sin A)^2}}$$

其中 $f(r) = \frac{1}{2\pi} \bigcirc r$ ，而上述分母的符号在 $\alpha(P) \leq \frac{\pi}{2}$ 时取正号，在 $\frac{\pi}{2} < \alpha(P) < \pi$ 时取负号。
[由[定理 4]推导[推论 3]的证明将在证明[定理 4]之后再作。]

弧长元素和弧长的第一变分公式：

要研究一个旋转面中的测地线，当然首先得明确其中一条给定曲线（亦即通路）的长度的定义以及它的解析表达式，然后再进而研究连结两个给定点之间的某种曲线族的长度的变化规律。

从解析几何的观点，一条曲线乃是一个动点的轨迹，它的位置（亦即坐标）可以用「时间参数」 t 的函数加以解析描述，叫做该曲线的参数表达式。例如， $\{x = a \cos t, y = b \sin t; 0 \leq t \leq 2\pi\}$ 乃是椭圆的一种参数表式。再者，一条曲线的长度则可以用积分加以表达。例如欧氏平面上一条以 $\{x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b\}$ 为其笛氏坐标参数表式的曲线，其弧长的解析表式乃是 $\int_a^b [f'(t)^2 + g'(t)^2]^{\frac{1}{2}} dt$ 。上述弧长积分公式也可以用下述弧长元素的微分公式简洁地加以概括，亦即

$$(14) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

上述微分公式的几何意义就是说曲线的「微段」 $\{(x(t), y(t)), t_i \leq t \leq t_{i+1} = t_i + \Delta t\}$ 的弧长和直线段 $\overline{P(t_i)P(t_{i+1})}$ 的长度几乎相等，亦即至多相差一个 Δt 的高阶微量。若用算式表达，即有

$$(15) \quad \Delta_i s^2 \equiv \overline{P(t_i)P(t_i + \Delta t)}^2 = \Delta_i x^2 + \Delta_i y^2 \pmod{\Delta t^3}$$

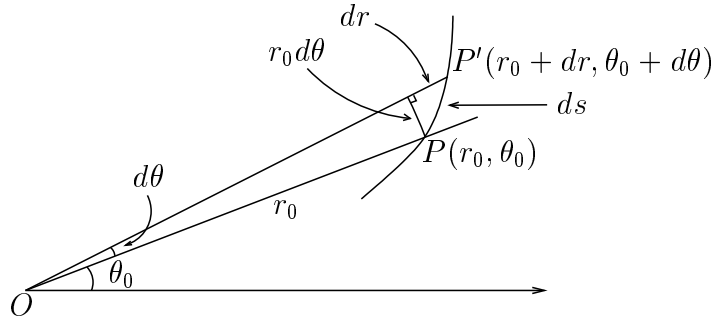
其实这也就是 (14)-式的实质内涵，而它也就是勾股定理的微分化形式是也！若改用欧氏平面的极坐标来表达，则有

$$(16) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \\ dx &= dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta, \quad dy = dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

代入 (14)-式即得

$$(14') \quad ds^2 = (dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta)^2 + (dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

这也就是欧氏平面的极坐标弧长元素的微分式。如 [图-11] 所示，(14') 其实也是勾股定理的微分化形式。



[图-11]

在研讨一般的旋转面的极坐标弧长元素的微分式之前，让我们再来看一看单位球面这个常见而且重要的实例。设 $P(r, \theta)$ 是以北极为基点的球面极坐标，而 $P(x, y, z)$ 则是 P 点的笛氏坐标。如 [图-12] 所示，两者之间有下列坐标变换式，即

$$(17) \quad x = \sin r \cos \theta, \quad y = \sin r \sin \theta, \quad z = \cos r$$

将 (17')-式微分即得

$$(18) \quad \begin{cases} dx = \cos r \cos \theta dr - \sin r \sin \theta d\theta \\ dy = \cos r \sin \theta dr + \sin r \cos \theta d\theta \\ dz = -\sin r dr \end{cases}$$

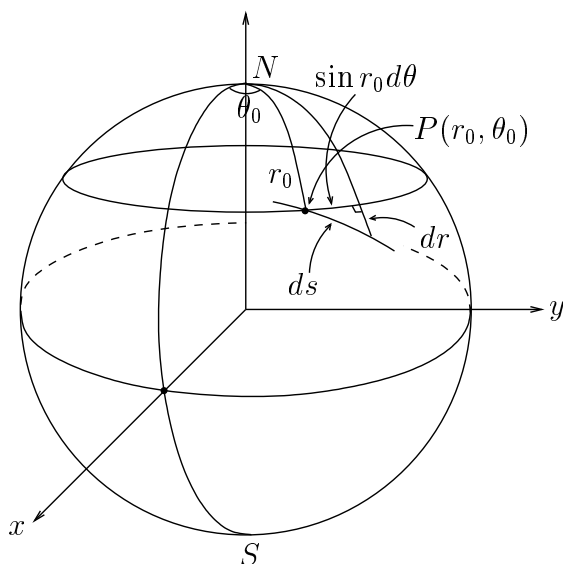
将 (18')-式代入三维笛氏坐标所熟知的弧长元素微分式

$$(19) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

即可计算而得下述球面坐标的弧长元素微分式：

$$(20) \quad ds^2 = dr^2 + \sin^2 r d\theta^2$$

如 [图-12] 所示，(20')-式也是勾股定理的微分形式。



[图-12]

从上面对于曲线弧长的实例分析，我们可以看到下述几点基本认识：

(i) 一条参数曲线的弧长在本质上乃是它的「细分线段」的弧长之总和，所以它乃是一个积分，亦即弧长元素的积分 ($\int ds$)。

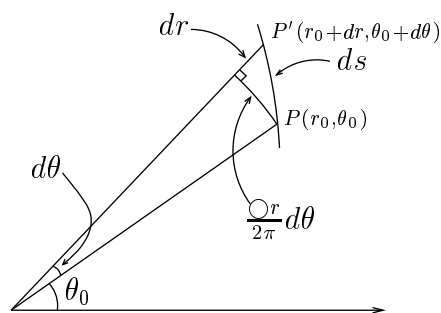
(ii) 弧长元素的几何本质就是那种细分微段的长度的线性（亦即一阶）逼近，因为在 $\int ds$ 的积分求和之中，任何比 dt 高阶的微量是完全不影响其积分值者。所以“ ds ”的实质乃是微段弧长的线性（亦即一阶）部分。换言之，也就是微段弧长的线性化。

(iii) 一个曲面 M 在其上一点 P 的切平面就是 M 在 P 点的邻近微片的线性逼近。所以上述切平面上的几何，其实就是 M 在 P 点邻近的几何的局部线性化者也；而切平面上的几何乃是欧氏平面的几何，其中的线段长度满足勾股定理，切向量的内积则是表达这种局部线性化所得的切平面几何的基本结构。

将上述对于曲面上曲线弧长概念的剖析所得的三点认识，用到旋转面上就可以得到它对于极坐标的弧长元素微分式，即

$$(21) \quad ds^2 = dr^2 + \left(\frac{r}{2\pi}\right)^2 d\theta^2$$

用 [图-13] 来说明，上述公式也就是微小直角三角形的勾股公式微分形式。



[图-13]

旋转面及其弧长元素：

总结上面的讨论，一个旋转面 M 在对于基点 O 的旋转运动下的轨道组成以 O 点为圆心的同心圆系，它们的圆周周长乃是描述 M 的几何本质函数 $\bigcirc r$ 。令 $f(r) = \frac{1}{2\pi} \bigcirc r$ ，则 M 上的弧长元素可以用极坐标以下述微分式表达之，即

$$(21') \quad ds^2 = dr^2 + f(r)^2 d\theta^2$$

再者， M 在 O 点的局部线性逼近乃欧氏平面，所以 $f(r)$ 在 $r = 0$ 的邻近的线性逼近就是 r ，亦即 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ 。

反之，上述弧长元素微分式也完全确定了 M 本身的几何结构，所以我们可以反过来，对于任给满足 $f(0) = 0$ 和 $f'(0) = 1$ 的二阶连续可微函数 $f(r)$ ，定义一个以 $f(r)$ 为其本质函数的旋转面， $M^2(f)$ ，它具有极坐标和 (21)-式所给的弧长元素微分式。这也就是我们要研讨旋转面的解析几何，自然而且恰如其广的范畴。在 $M^2(f)$ 上的任给一条平滑曲线 Γ ，可以用其极坐标参数式 $\{r = \varphi(t), \theta = \psi(t), a \leq t \leq b\}$ 加以描述，而它的长度则可以用下述积分式表达之，即

$$(22) \quad L(\Gamma) = \int ds = \int [dr^2 + f(r)^2 d\theta^2]^{\frac{1}{2}} = \int_a^b [\varphi'(t)^2 + f(\varphi(t))^2 \psi'(t)^2]^{\frac{1}{2}} dt$$

有了上述明确的概念性基础，就可以用微积分的计算去研究 $M^2(f)$ 上的弧长变分，从而证明[定理 4]及其[推论 3]。

$M^2(f)$ 上的弧长变分及其第一变分公式：

设 A, B 是 $M^2(f)$ 上的给定两点。连结于 A, B 之间的曲线是非常多种多样的；它们之间变动的自由度是无穷维的。由此可以想到，要用微积分去研究 A, B 两点之间的最短通路是无法像有限元函数的极值问题那样，直截了当地运用微分为零条件式去求解的。为了研究像弧长积分这种定义于无穷维事物（例如连结于 A, B 之间的平滑曲线之总体）的「函数」的极值问题，所发展的学科叫做变分学，而上述最短通路问题的研讨也就是变分学的发祥地。克服这种由于「变动自由度太大」在极值问题的研讨上所产生的困难的根本想法如下：

尽管连结于 A, B 之间的曲线在总体上有无穷维的变动自由度，但是归根究底，它们都可以想成是各种各样的「单维变动」的组合所构成的总体。由此可以想到，只要能够把「单维变动」的极值条件研究得一清二楚，其实也就足以用来探讨原来的极值问题。这种

返璞归真，以简御繁的想法就是变分学的基本想法和出发点。对于我们所要研讨的弧长极值问题的具体做法如下：

曲线之变分和弧长第一变分公式：

$M^2(f)$ 上一条连结 A, B 之间的平滑曲线 Γ 可以用它的一个极坐标参数式表达之，即

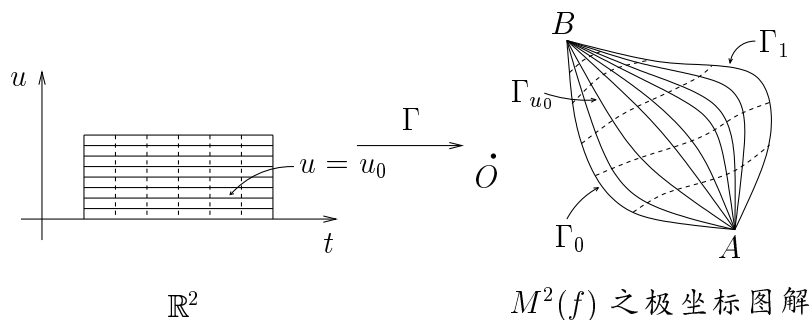
$$(23) \quad \Gamma = \{\Gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), a \leq t \leq b\}$$

其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 是二阶连续可微函数， $A = (\varphi(a), \psi(a)), B = (\varphi(b), \psi(b))$ 。

设 $\varphi(t, u)$ 和 $\psi(t, u)$ 是一对二阶连续可微的函数，其变域为 $a \leq t \leq b, 0 \leq u \leq 1$ 而且 $(\varphi(a, u), \psi(a, u))$ 和 $(\varphi(b, u), \psi(b, u)), 0 \leq u \leq 1$ ，分别是给定点 A, B 的极坐标。则对于任一给定之 u ，

$$(24) \quad \Gamma_u = \{\Gamma_u(t) = (\varphi(t, u), \psi(t, u)), a \leq t \leq b\}$$

乃是一条连结于 A, B 之间的平滑曲线，而 $\{\Gamma_u, 0 \leq u \leq 1\}$ 则构成一个「单维变动」的平滑曲线系，其中 $0 \leq u \leq 1$ 就是用来标记该曲线系的「变动参数」，我们把它简称为一个曲线之变分。一个曲线之变分的图像表达如 [图-14] 之图解所示。



[图-14]

令 $L(u)$ 为 Γ_u 的弧长，则 $L(u)$ 乃是一个定义于 $0 \leq u \leq 1$ 的可微函数，而其函数值则可以用弧长积分式表达之，即

$$(25) \quad L(u) = \int_a^b [(\frac{\partial \varphi}{\partial t})^2 + f(\varphi)^2 (\frac{\partial \psi}{\partial t})^2]^{\frac{1}{2}} dt$$

我们所要研讨者乃是 $\frac{dL}{du} \Big|_{u=0}$ 的积分表达式。因为 $\varphi(t, u)$ 和 $\psi(t, u)$ 的几何意义分别就是 $\Gamma_u(t)$ 的极坐标 r 和 θ ，所以在下面的计算中我们将根本改用 $r(t, u)$ 和 $\theta(t, u)$ 记之。

[注]：在这里，同学们遇到在纯为单元的微积分中尚未接触的偏微分符号如 $\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ 等等。例如 $\varphi(t, u)$ 乃是一个二元函数，其值是随着 t 和 u 的变动而改变的。但是在 u 取定为 u_0 的局限之下， $\varphi(t, u_0)$ 其实就是一个单元函数，它对于 t 的微分叫做 $\varphi(t, u)$ 对于 t 的偏微分，以 $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ 记之，所以它本质上乃是单元函数的微分。在此初见，其实乃是旧知新用。

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{dL}{du} \Big|_{u=0} &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} [(\frac{\partial r}{\partial t})^2 + f(r)^2 (\frac{\partial \theta}{\partial t})^2]^{\frac{1}{2}} \Big|_{u=0} dt \\ &= \int_a^b [(\frac{\partial r}{\partial t})^2 + f^2 (\frac{\partial \theta}{\partial t})^2]^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial t} + f f' \frac{\partial r}{\partial u} (\frac{\partial \theta}{\partial t})^2 + f^2 \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial t} \right\} \Big|_{u=0} dt \end{aligned}$$

在上述积分式中所出现的 $\left[\left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + f(r)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Big|_{u=0}$ 因式，在计算上是一个令人头痛者，而我们可以运用下述简朴的几何思想把这个令人头痛者化解成恒等于 1：一条曲线的长度当然和它的参数表式中参数选取无关。假如我们把上述参数 t 改用曲线 Γ_0 上的弧长参数 s ，则有

$$\left[\left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + f(r)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Big|_{u=0} \equiv 1$$

请注意： s 只是 Γ_0 上的弧长参数，一般来说它并非其他的 Γ_u 上的弧长参数，亦即 (26)-式中的 $\left[\left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + f(r)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ 只有在代入 $u=0$ 之后才恒等于 1；但是这也正是我们在简化 (26) 中所需要者。总之，在下述计算中，我们将改用上述 Γ_0 的弧长参数 s ，而 (26)-式则简化成

$$(26') \quad \frac{dL}{du} \Big|_{u=0} = \int_0^{L(0)} \left\{ \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial s} + f f' \frac{\partial r}{\partial u} \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 + f^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial s} \right\} \Big|_{u=0} ds$$

在 (26')-式之中所含的两个交差偏微分 $\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial u} \Big|_{u=0}$ 和 $\frac{\partial^2 \theta}{\partial s \partial u} \Big|_{u=0}$ 的几何意义间接且不甚明确

，宜用部分积分公式把它们更换成其几何意义更加明确的 $\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} \Big|_{u=0}$ 和 $\frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} \Big|_{u=0}$ 。这样的计算就可以把 (26')-式中的第一、第三项分别作下述改写：

$$(27) \quad \begin{aligned} \int_0^{L(0)} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial u} \Big|_{u=0} ds &= \left[\frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial u} \Big|_{u=0} \right]_0^{L(0)} - \int_0^{L(0)} \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} \frac{\partial r}{\partial u} \Big|_{u=0} ds \\ \int_0^{L(0)} f^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial^2 \theta}{\partial s \partial u} \Big|_{u=0} ds &= \left[f^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial \theta}{\partial u} \Big|_{u=0} \right]_0^{L(0)} \\ &\quad - \int_0^{L(0)} \left\{ 2 f f' \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial \theta}{\partial u} + f^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} \frac{\partial \theta}{\partial u} \right\} \Big|_{u=0} ds \end{aligned}$$

而且由于 Γ_u 的始终两点是固定不动的，所以

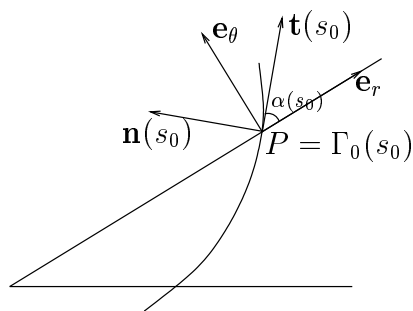
$$\frac{\partial r}{\partial u} \Big|_{s=0} = \frac{\partial r}{\partial u} \Big|_{s=L(0)} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \Big|_{s=0} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \Big|_{s=L(0)} = 0$$

所以 (27') 的两式中的第一项皆为 0。将 (27')-式取代 (26)-式中的第一、第三项，即得

$$(28) \quad \frac{dL}{du} \Big|_{u=0} = - \int_0^{L(0)} \left\{ \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} - f f' \frac{\partial r}{\partial u} \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 + (2 f f' \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial \theta}{\partial s} + f^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2}) \frac{\partial \theta}{\partial u} \right\} \Big|_{u=0} ds$$

现在，我们还要进一步研讨 (28)-式的表式整体的几何意义何在。此事当然得从起始曲线 Γ_0 在每一点 s 的局部几何中去探索之。

设 $P = \Gamma_0(s_0) = (r(s_0, 0), \theta(s_0, 0))$ 为起始曲线 Γ_0 上任给一点。如 [图-15] 所示， $M^2(f)$ 在 P 的切平面中具有两组自然给有的正交基，其一为曲线 Γ_0 在 P 点的单位切向量 $\mathbf{t}(s_0)$ 和单位法向量 $\mathbf{n}(s_0)$ ，其二则是极坐标系在 P 点坐标曲线单位切向量 $\mathbf{e}_r(P)$ 和 $\mathbf{e}_\theta(P)$ 。



[图-15]

令 $\alpha(s_0)$ 为它们之间相差的转角，则有

$$(29) \quad \begin{aligned} \mathbf{t}(s_0) &= \cos \alpha(s_0) \mathbf{e}_r + \sin \alpha(s_0) \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{n}(s_0) &= -\sin \alpha(s_0) \mathbf{e}_r + \cos \alpha(s_0) \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

再者，由 [图-15] 可见

$$(30) \quad \begin{aligned} \cos \alpha(s_0) &= \left. \frac{dr}{ds} \right|_{s_0}, \quad \sin \alpha(s_0) = f(r) \left. \frac{d\theta}{ds} \right|_{s_0} \\ \mathbf{e}_r &= \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{f(r)} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \theta}$ 分别表示沿著坐标曲线「 $\theta = \text{常数}$ 」和「 $r = \text{常数}$ 」而且分别以 r 和 θ 为其参变数的速度向量。再对 (30)-(i) 微分即得

$$(31) \quad -\sin \alpha \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2 r}{ds^2}, \quad \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} = f'(r) \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} + f(r) \frac{d^2 \theta}{ds^2}$$

用上式来消去 (28)-式中的 $\frac{d^2 r}{ds^2}$ 和 $\frac{d^2 \theta}{ds^2}$ ，可得

$$(32) \quad \begin{aligned} \left. \frac{dL}{du} \right|_{u=0} &= - \int_0^{L(0)} \left(\frac{d\alpha}{ds} + f'(r) \frac{d\theta}{ds} \right) \cdot \left\{ -\sin \alpha \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_{u=0} + \cos \alpha f(r) \left. \frac{\partial \theta}{\partial u} \right|_{u=0} \right\} ds \\ &= - \int_0^{L(0)} \left(\frac{d\alpha}{ds} + f'(r) \frac{d\theta}{ds} \right) \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{v}(s) ds \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{v}(s) = \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_{u=0} \frac{\partial}{\partial r} + \left. \frac{\partial \theta}{\partial u} \right|_{u=0} \frac{\partial}{\partial \theta} = \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_{u=0} \mathbf{e}_r + f(r) \left. \frac{\partial \theta}{\partial u} \right|_{u=0} \mathbf{e}_\theta$$

乃是沿著以 u 为参变数，曲线 $\{(r(s, u), \theta(s, u)), 0 \leq u \leq 1\}$ 在 $(r(s, 0), \theta(s, 0))$ 点的速度向量（参见 [图-15] 之所示）。通常我们把 $\{\mathbf{v}(s), 0 \leq s \leq L(0)\}$ 叫做变分向量场，把公式

$$(33) \quad \left. \frac{dL}{du} \right|_{u=0} = - \int_0^{L(0)} \left(\frac{d\alpha}{ds} + f'(r) \frac{d\theta}{ds} \right) \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{v}(s) ds$$

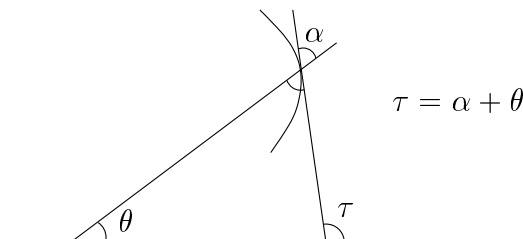
叫做 $M^2(f)$ 上的弧长第一变分公式。

[注]：上述 $M^2(f)$ 上的弧长第一变分公式的证明，对于初读者也许难以一读就懂。所以得逐步自行验算，逐步检查每步之要点。其实所用到的计算每步都是形式的微分、部分积分和代换化简。

在 $f(r) = r$ ，亦即 $M^2(f)$ 是欧氏平面的情形。如 [图-16] 所示，弧长第一变分公式之中所出现之

$$\frac{d\alpha}{ds} + f'(r) \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\tau}{ds}$$

乃是欧氏平面之中曲线的曲率。所以在 $M^2(f)$ 之中， $\frac{d\alpha}{ds} + f'(r) \frac{d\theta}{ds}$ 乃是曲线曲率的推广。



[图-16]

【定义】： $M^2(f)$ 中曲线的测地曲率定义为

$$(34) \quad \kappa_g(s) = \frac{d\alpha}{ds} + f'(r) \frac{d\theta}{ds}$$

$M^2(f)$ 中测地曲率恒为 0 的曲线叫做 $M^2(f)$ 中的测地线。

[定理 4]之证明：

$$(35) \quad \begin{aligned} \frac{d}{ds}(f(r) \sin \alpha) &= f(r) \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} + f'(r) \frac{dr}{ds} \sin \alpha \\ &= f(r) \frac{dr}{ds} \left(\frac{d\alpha}{ds} + f'(r) \frac{d\theta}{ds} \right) = 0 \end{aligned}$$

所以 $f(r) \sin \alpha$ 沿著一条测地线乃是一个常数。

[推论 3]之证明：

沿著测地线 $\overline{AB}$ ， $f(r) \sin \alpha = f(b) \sin A$ (常数)，所以

$$(36) \quad \frac{dr}{ds} = \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{f(b) \sin A}{f(r)} \right)^2} = \frac{\pm \sqrt{f(r)^2 - (f(b) \sin A)^2}}{f(r)}$$

亦即

$$(37) \quad \overline{AB} = \int_b^a ds = \int_b^a \frac{f(r) dr}{\pm \sqrt{f(r)^2 - (f(b) \sin A)^2}}$$

[注]：在 $f(r)$ 是一般的二阶连续可微函数的情形， $M^2(f)$ 中对于 $\triangle OAB$ 的广义余弦定律就是上述积分公式。但是在 $f(r)$ 是 r , $\sin r$ 或 $\sinh r$ 这三种特殊而且重要的情形，则积分公式 (37) 可以用初等函数加以表达，这也就分别是欧氏、球面和非欧几何中的余弦定律。[其验算乃是积分计算的一个有意思的习题。]

5 旋转面的 Gauss 曲率和 Gauss-Bonnet 公式

在一般的旋转面 $M^2(f)$ 中, §4 中所证明的广义正弦、余弦定律只有在三角形的一个顶点位于旋转对称的基点, 亦即 $\triangle OAB$, 这种情形才成立。而且正弦、余弦定律分别只有一个公式, 即

$$\frac{\sin A}{f(a)} = \frac{\sin B}{f(b)}$$

$$\overline{AB} = \int_b^a \frac{f(r)dr}{\pm \sqrt{f(r)^2 - (f(b) \sin A)^2}}$$

只有在 $M^2(f)$ 对于其中任给一点皆为旋转对称的情形, 才会对于任何三角形都有其正弦、余弦定律, 因为其任选一点皆可作为旋转对称之基点也! 换句话说, 只有在 $M^2(f)$ 是匀称的情形, 正弦、余弦定律才能够对于任给三角形普遍成立!

在这里自然会想到去研讨下述问题, 即究竟有那些旋转面是匀称的呢? 亦即对于其中每一点都是旋转对称者。欧氏平面、半径为 R 的球面以及非欧面都是匀称的旋转面, 它们的本质函数 $f(r)$ 分别是

$$(38) \quad f(r) = \begin{cases} r & (\text{欧氏}) \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K} r & (\text{球面}, K = \frac{1}{R^2}) \\ \frac{1}{\sqrt{K'}} \sinh \sqrt{K'} r & (\text{非欧}, \delta(\Delta) = K' A(\Delta)) \end{cases}$$

从解析的观点来看, 上述三者分别满足

$$(39) \quad f''(r) + K f(r) = 0, \quad f(0) = 0 \text{ 和 } f'(0) = 1$$

其中 $K = 0$ (欧氏), $K > 0$ (球面), $K < 0$ (非欧), 亦即 (39)-式中的 K 也就是使得

$$(39') \quad \varepsilon(\Delta) = K A(\Delta)$$

的那个本质性常数。

本节将证明下述匀称旋转面的唯一性定理, 即

【定理 5】: $M^2(f)$ 是一个匀称旋转面的充要条件就是 $f(r)$ 满足 (39)。

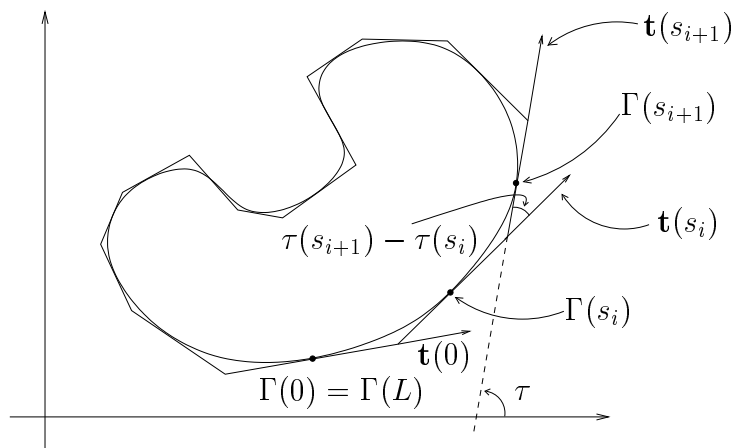
再者, 从上述简短的分析, 还可以想到[定理 5]的证明, 自然地会和欧氏、球面以及非欧面的三角形内角和定理在 $M^2(f)$ 上的推广有关。首先, 让我们先来分析一下三角形内角和定理本身在欧氏平面和球面上的自然推广应该是什麼形式。

【分析】:

(一) 欧氏平面三角形内角和定理的自然推广:

由三角形内角和恒为一个平角, 很容易推广成 n 边形的内角和恒等于 $(n-2)$ 个平角, 因为一个 n 边形可以分割成 $(n-2)$ 个三角形。再者, 上述 n 边形的内角和定理又可以转化为一个统一的外角和定理, 即任何多边形的外角和恒等于一个周角, 亦即 2π 。

设 Γ 是欧氏平面中一条不自相交的平滑闭曲线。 $0 \leq s \leq L$ 是 Γ 的弧长参数， $\kappa(s)$ 是它在 $\Gamma(s)$ 点的曲率， $\kappa(s) = \frac{d\tau}{ds}$ 。



[图-17]

如 [图-17] 所示，对于 Γ 的每一小段皆有

$$(40) \quad \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa(s) ds = \int_{s_i}^{s_{i+1}} d\tau = \tau(s_{i+1}) - \tau(s_i)$$

所以由前述外角和定理即得

$$(41) \quad \int_0^L \kappa(s) ds = \sum_{i=0}^N \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa(s) ds = \sum_{i=0}^N (\tau(s_{i+1}) - \tau(s_i)) = 2\pi$$

在一般的情形，设 Ω 是一个单连通的区域，其边界 $\partial\Omega$ 是分段平滑的曲线，而 α_i 则是 $\partial\Omega$ 在其有限个角点的外角，则不难看到

$$(42) \quad \int_{\partial\Omega} \kappa(s) ds + \sum \alpha_i = 2\pi$$

这也就是多边形外角和恒等于一个周角的推广。

(二) R -球面上三角形内角和的自然推广：

当 $\triangle$ 是一个 R -球面上的三角形时，即有

$$(43) \quad \begin{aligned} 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) &= 2\pi - [(\pi - A) + (\pi - B) + (\pi - C)] \\ &= A + B + C - \pi = \varepsilon(\triangle) = \frac{1}{R^2} A(\triangle) \end{aligned}$$

当 Ω 是一个 R -球面上的多边形，则可以把 Ω 分割成三角形再逐个运用 (43)，即得

$$(44) \quad 2\pi - \sum \alpha_i = \frac{1}{R^2} A(\Omega)$$

由此可以想到在 R -球面上一个边界是分段平滑曲线的单连通区域 R ，相应于 (42)-式的推广公式应该是：

$$(*) \quad 2\pi - \int_{\partial\Omega} \kappa_g(s) ds - \sum \alpha_i = \frac{1}{R^2} A(\Omega)$$

其中 $\sum \alpha_i$ 乃是 Ω 在其各个角点的外角之和，而 $\kappa_g(s) = \frac{d\alpha}{ds} + \cos\left(\frac{r}{R}\right) \frac{d\theta}{ds}$ 是 R -球面上的测地曲率。至少，在 $\partial\Omega$ 是分段测地线的情形，(*) 的正确性业已成立，即 (44)。现在让我们再来验证一个 Ω 是一个半径为 r_0 的圆的特殊情形。如 [图-18] 所示， $\partial\Omega$ (亦即 $r = r_0$) 在每一点的 α 都等于 $\frac{\pi}{2}$, $r = r_0$ 。所以

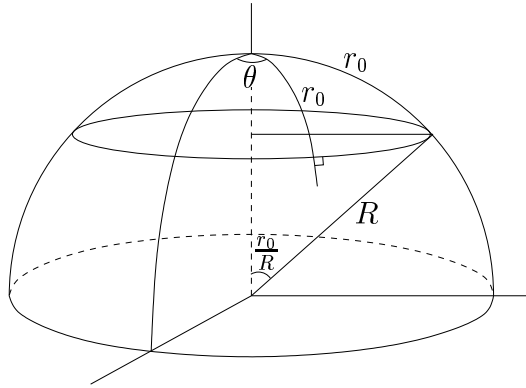
$$(45) \quad \begin{aligned} \kappa_g(s) &= \frac{d\alpha}{ds} + f'(r) \frac{d\theta}{ds} = \cos \frac{r_0}{R} \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} \cot \frac{r_0}{R} \\ \int_{\partial\Omega} \kappa(s) ds &= \frac{1}{R} \cot \frac{r_0}{R} \cdot 2\pi R \sin \frac{r_0}{R} = 2\pi \cos \frac{r_0}{R} \end{aligned}$$

另一方面，由 Archimedes 的球面面积公式的证明，易见

$$(46) \quad A(\Omega) = R^2 \cdot 2\pi \left(1 - \cos \frac{r_0}{R}\right)$$

这样也就验证了 (*)-式在上述特殊情形的正确性，即

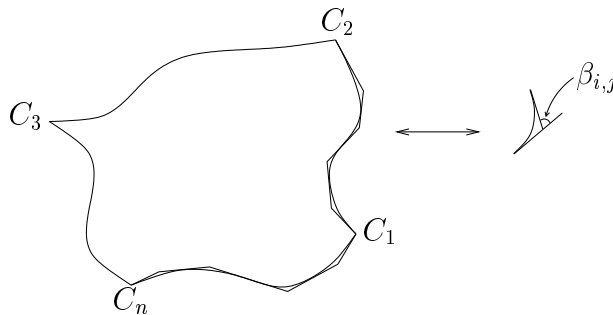
$$(47) \quad 2\pi - \int_{\partial\Omega} \kappa_g(s) ds = 2\pi \left(1 - \cos \frac{r_0}{R}\right) = \frac{1}{R^2} A(\Omega)$$



[图-18]

现在让我们进而验证 (*)-式在 R -球面上的普遍正确性：我们将采用一种简朴自然的想法，把上述验证归于前面两种业已得证的特殊情形（亦即 $\partial\Omega$ 是多边形和圆）的适当组合来加以论证。

设 Ω 是一个 R -球面上的单连通区域，而且其边界 $\partial\Omega$ 是分段平滑的。令 $\{C_i\}$ 是 $\partial\Omega$ 的角点， $\{\alpha_i\}$ 是各个角点的外角。在 $\partial\Omega$ 的第 i 段平滑曲线 $\widehat{C_i C_{i+1}}$ 选取其 n -等分点，然後再在每点作其相切于 $\partial\Omega$ 的测地线（亦即大圆圆弧）。如 [图-19] 所示，它们围成一个其各边和 $\partial\Omega$ 相切于那些等分点而且和 $\partial\Omega$ 在角 $\{C_i\}$ 具有同一外角的多边形 Ω_n 。



[图-19]

对于上述所构造的多边形 Ω_n ，它除了在那些和 Ω 共有的角点 $\{C_i\}$ 的外角是 α_i ，还有那种如局部放大插图所示的外角 $\beta_{i,j}$ 。所以有

$$(48) \quad 2\pi - \sum_i \alpha_i - \sum_{i,j} \beta_{i,j} = \frac{1}{R^2} A(\Omega_n)$$

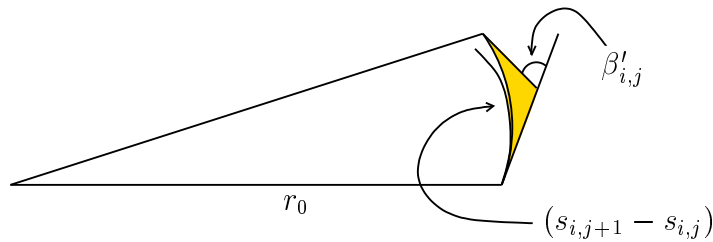
把 (48)-式和所要证明的 (*) 相比较，不难看到我们所要证明者，可以归于下述极限式去验证之，亦即 (**) 是否成立？

$$(**) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds - \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} \right) = 0$$

再者，由积分的定义，(**)-式的验证又可以归于

$$(***) \quad \left| \kappa_g(s_{i,j}) \cdot (s_{i,j+1} - s_{i,j}) - \beta_{i,j} \right|$$

是否是微量 $(s_{i,j+1} - s_{i,j})$ 的高阶微量（亦即是至大和 $(s_{i,j+1} - s_{i,j})^2$ 相当者）的验证。由于 $\kappa_g(s)$ 是一个连续可微函数，所以 (**) 的验证又可以归于 $\kappa_g(s)$ 在微段 $[s_{i,j}, s_{i,j+1}]$ 上取常数值 $\kappa_g(s_{i,j})$ 的情形验算之，亦即 $\partial\Omega$ 在上述微段乃是一段圆弧的情形。由 [图-20] 所示



[图-20]

由 (45), (46) 的局部形式可得

$$(49) \quad \kappa_g(s_{i,j})(s_{i,j+1} - s_{i,j}) - \beta'_{i,j} = \frac{1}{R^2} (\triangleright)$$

而 (49)-式右侧的面积显然是弧长 $(s_{i,j}, s_{i,j+1})$ 的二阶微量。这样，也就验证了 (*)-式在 R -球面上是普遍成立的。

从上面对于欧氏平面和 R -球面这种简朴而且基本的情形，实事求是的探索和验证，使得我们认识到

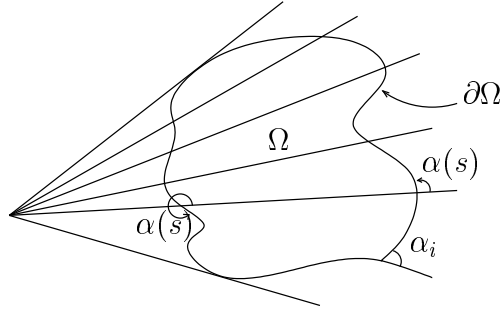
$$(\star) \quad 2\pi - \int_{\partial\Omega} \kappa_g(s) ds - \sum \alpha_i$$

乃是一个值得深究的基本几何量，因为它乃是多边形外角和的自然推广，而且在欧氏和 R -球面的情形简洁地反映着它们的「本质性二维曲率」。有了这样一个明确的目标，就不难实事求是去研究它和区域 Ω 的那一种几何本质密切相关。这种研讨之所得就是下述重要的几何公式，即

【定理 6】（旋转面的 Gauss-Bonnet 公式）：

$$(50) \quad 2\pi - \int_{\partial\Omega} \kappa_g(s) ds - \sum \alpha_i = \iint_{\Omega} \left(-\frac{f''(r)}{f(r)} \right) dA$$

证明：若将所给的 Ω 分割成 Ω_1, Ω_2 ，则易见 (50)-式的两侧都可以分别表成它在 Ω_1, Ω_2 的几何量之和。由此可见[定理 6]的证明可以用适当的分割，把一般的情形归于 Ω 如 [图-21] 所示的情形加以论证，亦即 Ω 位于 $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ 的范围之内。

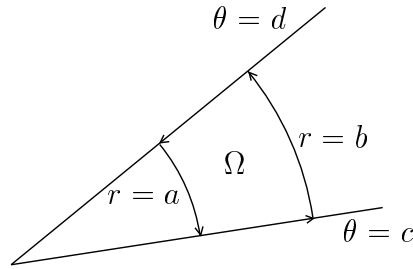


[图-21]

对于这样的区域 Ω , $2\pi - \int_{\partial\Omega} d\alpha - \sum \alpha_i = 0$ 。所以

$$\begin{aligned}
 (51) \quad 2\pi - \int_{\partial\Omega} \kappa_g(s)ds - \sum \alpha_i &= (2\pi - \int_{\partial\Omega} d\alpha - \sum \alpha_i) - \int_{\partial\Omega} f'(r)d\theta \\
 &= - \int_{\partial\Omega} f'(r)d\theta = - \iint_{\Omega} f''(r)dr \wedge d\theta \quad (\text{Green's 定理}) \\
 &= \iint_{\Omega} \left(- \frac{f''(r)}{f(r)} \right) f(r)dr \wedge d\theta = \iint_{\Omega} \left(- \frac{f''(r)}{f(r)} \right) dA \quad \square
 \end{aligned}$$

[注]： $\int_{\partial\Omega} f'(r)d\theta = \iint_{\Omega} f''(r)dr \wedge d\theta$ 是二元微积分中 Green's 定理的特殊情形。其证明可以归于 Ω 是坐标矩形（亦即 $\Omega = \{(r, \theta), a \leq r \leq b, c \leq \theta \leq d\}$ ）的情形组合而得。再者，在 Ω 是坐标矩形的情形，如 [图-22] 所示：



[图-22]

$$\begin{aligned}
 (52) \quad \int_{\partial\Omega} f'(r)d\theta &= f'(b)(d-c) + f'(a)(d-c) \\
 &= (d-c)(f'(b) - f'(a)) = (d-c) \int_a^b f''(r)dr \\
 &= \int_c^d \left[\int_a^b f''(r)dr \right] d\theta = \iint_{\Omega} f''(r)dr \wedge d\theta
 \end{aligned}$$

乃是单元微积分基本定理的直接推论。

【推论 1】： $-\frac{f''(r)}{f(r)}$ 乃是一个具有本质性的局部几何量，它就是 $M^2(f)$ 在 $P(r, \theta)$ 点的高斯曲率。

证明：当我们在 $P(r_0, \theta_0)$ 点任选一个邻域 Ω ，则由 (50)-式的左侧可见 $\iint_{\Omega} \left(-\frac{f''(r)}{f(r)}\right) dA$ 是一个本质性的局部几何量。再者当 $A(\Omega) \rightarrow 0$

$$(53) \quad -\frac{f''(r_0)}{f(r_0)} = \lim_{A(\Omega) \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Omega} \left(-\frac{f''(r)}{f(r)}\right) dA}{A(\Omega)}$$

所以 $-\frac{f''(r)}{f(r)}$ 本身乃是一个具有本质性的局部几何量。 □

【推论 2】： $M^2(f)$ 是匀称的必要条件是 $-\frac{f''(r)}{f(r)}$ 等于一个常数。

证明： $M^2(f)$ 是一个匀称的旋转面，亦即 $M^2(f)$ 中任给两点 P, Q 都有一个 $M^2(f)$ 的保长变换把 P 点映射到 Q 点。由此可见 P, Q 两点具有完全相同的局部几何性质，所以

$$\left(-\frac{f''(r)}{f(r)}\right)_P = \left(-\frac{f''(r)}{f(r)}\right)_Q$$

亦即 $-\frac{f''(r)}{f(r)}$ 是一个常数。 □

【推论 3】（定理 5）： $M^2(f)$ 是匀称的必要条件是

$$(54) \quad f(r) = \begin{cases} r & (K = 0) \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K} r & (K > 0) \\ \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh \sqrt{-K} r & (K < 0) \end{cases}$$

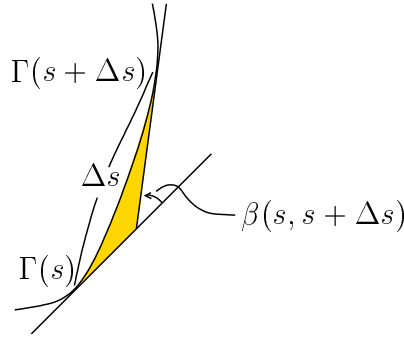
证明：由 [推论 2] 得知 $-\frac{f''(r)}{f(r)} = \text{常数} = K$ ，亦即 $f(r)$ 乃是下述二阶常微分方程

$$(55) \quad f''(r) + Kf(r) = 0$$

满足初值条件 $f(0) = 0$ 和 $f'(0) = 1$ 的解。易证这种解是唯一的，而 (54) 所给者就是那个唯一解。 □

【推论 4】：设 Γ 是一条平滑曲线， s 是其弧长参数。如 [图-23] 所示， $\beta(s, s + \Delta s)$ 乃是 Γ 在 $\Gamma(s)$ 和 $\Gamma(s + \Delta s)$ 这两点的测地线切线相交的外角，则有

$$(56) \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\beta(s, s + \Delta s)}{\Delta s} = \kappa_g(s)$$



[图-23]

证明：令 Ω 为 [图-23] 中阴影所示的区域。由公式 (50)，即有

$$(57) \quad 2\pi - \int_{s+\Delta s}^s \kappa_g(s)ds - 2\pi - \beta(s, s + \Delta s) = \iint_{\Omega} \left(-\frac{f''(r)}{f(r)} \right) dA$$

而上式右侧之量显然是和 $A(\Omega)$ 相当者，所以是和 Δs^2 相当者。因此

$$(58) \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\beta(s, s + \Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \int_s^{s+\Delta s} \kappa_g(s)ds = \kappa_g(s) \quad \square$$

[注]：(56)-式也就说明了一条曲线的测地曲率的几何内涵及其名称的来由。

6 结语

总结本章的研讨，我们对于欧氏、球面和非欧这三种具有高度对称性的几何体系，获得了下述几点统一全局的认知：

(一) 三者具有同样的连续性和对称性（例如三角形 S.A.S. 叠合性），但是三者的三角形内角和则分别是等于，大于和小于一个平角。

(二) 对于对称性的深入定量分析所得的基本定理就是三种几何学中的正弦、余弦定律。而且通过旋转面的解析几何，我们认识到正弦定律的本质乃是沿著测地线的等速运动对于旋转对称的角动量守恒定律。这种统一的观点使得我们一方面可以把原来只是在欧氏、球面和非欧几何中的正弦、余弦定律推广成所有旋转面皆有的广义正弦、余弦定律，而且也因而把原先各别论证的基本定理给以统一的证明。

(三) 对于欧氏、球面和非欧几何中的三角形内角和，我们有一个形式上统一的定理，亦即

$$\varepsilon(\Delta) = KA(\Delta)$$

其中 K 分别是等于，大于和小于零的常数。把它扩展而且深化之所得，即为下述 Gauss-Bonnet 公式：

$$2\pi - \int_{\partial\Omega} \kappa_g(s)ds - \sum \alpha_i = KA(\Omega)$$

而上述公式又可以推广成任给旋转面 $M^2(f)$ 上的 Gauss-Bonnet 公式，即

$$2\pi - \int_{\partial\Omega} \kappa_g(s) ds - \sum \alpha_i = \iint_{\Omega} \left(-\frac{f''(r)}{f(r)} \right) dA$$

(四) 上述公式的[推论 2]和[推论 3]确立了具有欧氏、球面和非欧几何同样的高度对称性的几何体系是唯一存在的，对于每一个 K 只有一个，它就是 (54)-式所给定的 $f(r)$ 所组成的 $M^2(f)$ ！

(五) 上述唯一性定理的一个直接推论是：在欧氏公理体系中，若将第五公设改用任何「一小点」在欧氏空间成立但是在非欧空间不成立的假设，皆足以完全刻划欧氏几何。这也就是为什么两千多年来有很多杰出的几何学家，误认为他们业已找到第五公设的证明的原由。因为在任何地方不自觉地渗入「一小点」欧氏几何中显然成立的「奥援」，第五公设就可以从而得以证之。从 Gauss 关于这方面的书信中，可以看到他在试图证明第五公设中，肯定有过多次渗入杂念因而犯错的私下体验。

(六) 由本章的讨论，可以看到欧氏、球面和非欧这三种几何，不但大同小异，而且还存在著大量深刻的共同定理。这种三者皆成立的共性几何的系统研究，其实是十分有意义而且有待我们致力拓展的领域。当年 Bolyai 在他开创性的短文（总共只有 26 页），业已创导这样一种几何学，他称之为绝对几何。Bolyai 正弦定律，即

$$\frac{\sin A}{\bigcirc a} = \frac{\sin B}{\bigcirc b} = \frac{\sin C}{\bigcirc c}$$

就是其中所得的一个辉煌成就。本章的研讨方式可以说是直接继承他的创见者。其实，也唯有对于绝对几何学作深入研究，我们才能真正深刻地理解对称性的既深且广的影响与威力！